Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Tentamen TEN1 i linjär algebra TNIU 75

för BI, SL, FTL

2019-10-24 kl. 08.00—13.00

Jour: Krzysztof Marciniak, tel. 011-36 33 20. **Inga hjälpmedel är tillåtna.** Varje uppgift bedöms med 0-6p. För betyget n ($n = 3, 4, 5$) krävs $8n - 8$ p. För att få full poäng måste du kommentera / förklara dina beräkningar. I parentes anges hur många poäng varje deluppgift är värd. *Kontrollera dina svar där det är möjligt.*

1. a) Definiera begreppet *vektorprodukt* av två vektorer. (3p)

   b) Beräkna arean av den triangel som har hörn i punkterna $A = (1, -1, 1)$, $B = (2, -3, 2)$, $C = (2, 2, 2)$ (givna i ett ON-koordinatsystem). (3p)

2. Bestäm avståndet mellan punkten $P = (4, 3, -1)$ och det plan som innehåller linjerna l_1 : $(x, y, z) = (-2, 2, 2) + t(0, 1, 1)$ och $l_2 : (x, y, z) = (-1, -2, 1) + t(1, -3, 0)$ (ON-koordinatsystem).

3. Låt $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ vara en bas i rummet. En linjär avbildning $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ges av

$$F(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3},\ F(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3},\ F(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$$

   a) Visa att avbildningen F är bijektiv. (2p)

   b) Ange matrisen för den inversa avbildningen F^{-1}. (2p)

   c) Ange alla vektorer $\overrightarrow{u}$ som uppfyller kravet $F(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{e_1}$. (2p)

4. Låt $P : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara den ortogonala projektionen på planet $\Pi :\ x + y - z = 0$ (givet i ett ON-koordinatsystem)

   a) Bestäm P:s matris (3p)

   b) Bestäm projektionen av linjen $l : (x, y, z) = (2 + 2t, 1 - 3t, 2t)$ på planet Π. (3p)

5. Antag att en linjär avbildning F av rummet representeras i en ON-bas av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   a) Visa att F är en rotation följd av en spegling. (2p)

   b) Bestäm rotationsaxeln och rotationsvinkeln. (4p)

6. a) Formulera spektralsatsen. (1p)

   b) En linjär avbildning $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ har i en ON-bas $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   Bestäm en ON-bas bestående av egenvektorer till F. (3p)

   c) Beräkna A^{50}. (2p)

7. Visa att varje 2×2 matris A uppfyller sin egen karakteristiska ekvation, dvs visa att om $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ är matrisens karakteristiska polynom så är $p(A) = 0$, där *matrispolynomet* $p(A)$ uppstår genom att ersätta varje λ i $p(\lambda)$ med A.