Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till kontrollskrivningen KTR1 i linjär algebra TNIU 75
för BI2, SL2, FTL2

2019-09-26 kl. 14.00—16.00

1. a) Två $n \times n$ matriser A och B är varandras inverser om $AB = BA = E$ där E betecknar $n \times n$ enhetsmatris. Se def. 2.3 på sid. 53 i kursboken.

   b) Man ser lätt att $AB = E$ och således är

$$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} = E^{-1} = E$$

(enhetsmatrisen E är förstås sin egen invers). Den första likheten i sviten ovan följer ur regeln 3 i Sats 2.7 på sid. 58. Ser man inte att $AB = E$ kan man börja med at ta fram A^{-1} och en enkel kalkyl leder då till att $A^{-1} = B$ och därför är $B^{-1}A^{-1} = B^{-1}B = E$.

2. a) Vi vill visa att vektorerna

$$\overrightarrow{f}_1 = \overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2, \quad \overrightarrow{f}_2 = \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2, \quad \overrightarrow{f}_3 = \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3$$

(där $e = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ är en bas i rummet) utgör också en bas. Vi måste då visa att $\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \overrightarrow{f}_3$ är linjärt oberoende. Detta visas (se Sats 3.4 sid. 96) genom att lösa vektorekvationen

$$\lambda_1\overrightarrow{f}_1 + \lambda_2\overrightarrow{f}_2 + \lambda_3\overrightarrow{f}_3 = \overrightarrow{0}$$

med avseende på λ_i. Eftersom $\overrightarrow{f}_1 = (1, -1, 0)$ i basen e osv. så är denna ekvation ekvivalent med

$$\lambda_1 (1, -1, 0) + \lambda_2 (1, 1, 0) + \lambda_3 (1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

vilket ger tre linjära ekvationer (en för varje komponent)

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

som har bara den trivial lösningen. Detta innebär att $\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \overrightarrow{f}_3$ är linjärt oberoende och utgör således en bas i rummet.

En alternativ metod är att beräkna $\det T$ för matrisen T vars kolonner består av koefficienter av $\overrightarrow{f}_i$ i basen e:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi får då $\det T = 2 \neq 0$ (det snabbaste sättet att räkna ut $\det T$ i detta fall är Laplaceutveckling längs den tredje raden) vilket enligt Sats 5.10 sid 143 (eller Sats 5.11 sid. 144-145, s.k.

"supersatsen" :-), påståendena v) och iii) alternativt iv)) innebär att $\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \overrightarrow{f}_3$ är linjärt oberoende (tänk på att $\det T$ är proportionell till volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \overrightarrow{f}_3$. Så snart är denna volym skild från noll är vektorerna som spänner upp parallellepipeden linjärt oberoende).

b) Basbytematrisen från basen e till basen f är exakt matrisen T angiven i lösningen av uppgift 2 a) ovanför. Enligt satsen om basbyte (Sats 3.5 sid. 104) gäller att $Y = T^{-1}X$ där X och Y är kolonnmatriser innehållande $\overrightarrow{u}$:s koordinater i basen e respektive i basen f. En uträkning ger att

$$T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(kontrollera detta) så får vi

$$Y = T^{-1}X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Det betyder att $\overrightarrow{u} = (-1, 0, 3)$ i basen f eller, vilket är samma sak, att $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{f}_1 + 3\overrightarrow{f}_3$. Detta kan faktiskt kontrolleras genom direktberäkning:

$$-\overrightarrow{f}_1 + 3\overrightarrow{f}_3 = -(\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2) + 3(\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3) = 2\overrightarrow{e}_1 + 4\overrightarrow{e}_2 + 3\overrightarrow{e}_3$$

vilket stämmer med vektorn $\overrightarrow{u}$ angiven i basen e.

c) Vi kan utnyttja resultat i b) eftersom vi ser lätt att $\overrightarrow{v}$ är lika med $\overrightarrow{u}$ i uppgiften b). Det betyder att $\overrightarrow{v}$:s koordinater i basen e är $(2, 4, 3)$. Inser vi inte detta får vi räkna dem med hjälp av Sats 3.5 igen och får

$$X = TY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. a) Se Definition 4.1, sid. 111.

b) Den sökta vinkeln α ges av formeln (se Exempel 7 sid. 118)

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}|} \overset{\text{basen är ON}}{=} \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

och därför är $\alpha = \arccos(1/2) = \pi/3 = 60°$.

c) Enligt projektionsformeln (se Exempel 7 sid. 118 igen) har vi att projektionen $\overrightarrow{u}_{\overrightarrow{v}}$ av vektorn $\overrightarrow{u}$ på vektor $\overrightarrow{v}$ ges av

$$\overrightarrow{u}_{\overrightarrow{v}} = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|^2}\overrightarrow{v} \overset{\text{basen är ON}}{=} \frac{3}{6}\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$$

4. a) Den sökta volymen ges av (se Sats 5.4 och vidare förklaring på sid. 137) absolutbelopp av determinanten, vars kolonner (eller rader, spelar ingen roll eftersom $\det A = \det A^t$) består av koordinater av vektorerna $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ och $\overrightarrow{w}$ (notera att basen i vilken anges vektorerna är ON). Enkel uträkning visar att

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -7a$$

och då ges den sökta volymen av $V = 7\,|a|$. Så snart $a \neq 0$ är $V > 0$ och vektorerna blir då linjärt oberoende, så att de utgör en bas.

b) Antag att

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

så är

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

och om vi använder Sarrus formeln (se Figur 5.10 sid. 138) ser vi att

$$\det(\lambda A) = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} \end{matrix}$$

och det syns att varje diagonal och varje antidiagonal multipliceras med samma faktor λ^3, v.s.v.

Obs: det som följer nedanför krävs inte för att få full poäng på uppgiften. Tanken är bara att ni som är intresserade kan få se hur den allmänna definitionen av determinanten kan nyttjas.

Om A är en godtycklig $n \times n$ matris och λ ett godtyckligt reellt tal då gäller att

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$$

Detta följer direkt ur den allmänna definitionen av determinant, som finns på sid. 305 i kursboken. Determinant definieras allmänt som en summa av produkter på formen

$$(-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

(våra diagonaler och antidiagonaler i Sarrus är exakt sådana produkter) där σ är en så kallad permutation av mängden $\{1, \dots, n\}$ och $(-1)^\sigma$ står för $+1$ om permutationen är jämn eller -1 om permutationen är udda. Om vi multiplicerar A med λ blir varje term $a_{i\sigma(i)}$ i produkten ovan multiplicerad med faktor λ; hela produkten multipliceras således med λ^n, så determinanten, som är lika med summan av dessa produkter (över alla möjliga permutationer, som det finns $n!$ av (ej uppropstecknet utan fakultet)), multipliceras också med samma faktor λ^n.