Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i linjär algebra TNIU 75
för BI, SL, FTL

1. a) Se Definition 5.2 sid. 131.

   b) Den sökta arean ges exempelvis av

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|(-5,0,5)\right| = \frac{\sqrt{25+25}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

   där $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ betecknar den ON-bas som ingår i vårt ON-koordinatsystem (se Definition 3.2 sid. 92).

2. Notera först att linjerna l_1 och l_2 måste skära varandra för att kunna ligga i ett och samma plan Π (ty de är inte parallella), vilket de gör i punkten $Q = (-2,1,1)$, detta behöver man dock inte fastställa under tentamen utan man får lita på sin examinator att linjerna skär varandra. Vi behöver först fastställa planets ekvation. En normal till Π fås enklast som vektorprodukt av bägge linjernas riktnigsvektorer. Linjen l_1 har riktningsvektor $\overrightarrow{v}_1 = (0,1,1)$ och linjen l_2 har riktningsvektor $\overrightarrow{v}_2 = (1,-3,0)$ och således

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (3,1,-1)$$

   Planet Π har således ekvationen $3x + y - z + D = 0$ och konstanten D kan fås genom att sätta en godtycklig punkt i planets ekvation. Vi kan sätta till exempel Q i planets ekvation och får $-6+1-1+D=0$ vilket ger $D=6$. Det betyder att planet ifråga har ekvationen $3x+y-z+6=0$. Återstår att hitta avståndet mellan P och Π. Detta är en standarduppgift: man tar fram ekvation för den linje som går genom P och som är ortogonal mot Π (dvs som är parallell med $\overrightarrow{n}$):

$$l' : (x,y,z) = (4,3,-1) + t(3,1,-1) = (4+3t, 3+t, -1-t)$$

   och sätter högerledet i Π:s ekvation för att ta fram det värde på t för vilket l' skär Π:

$$3(4+3t) + 3 + t - (-1-t) + 6 = 0$$

   vilket har lösningen $t = -2$. Skärningspunkten S mellan l' och Π är därför $S = (-2,1,1)$ (som $\in \Pi$ (kontrollera detta)) och det sökta avståndet blir

$$d = \left|\overrightarrow{PS}\right| = |(-6,-2,2)| = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

   Alternativt kan man använda den färdiga formeln på sid 188 i boken för avståndet mellan planet $Ax+By+Cz+D=0$ och punkten (x_0,y_0,z_0). Vi får då direkt:

$$\begin{aligned} d &= \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|3\cdot 4 + 1\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) + 6|}{\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}} \\ &= \frac{22}{\sqrt{11}} = 2\sqrt{11} \end{aligned}$$

   alltså samma resultat.

3. a) Avbildningsmatrisen i basen e är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(kom ihåg att bilder av basvektorer, dvs vektorerna $F(\overrightarrow{e_i})$, definierar kolonner i A) och enkel uträkning visar att $\det A = 1 \neq 0$. Enligt "supersatsen" (Sats 7.6 sid. 213) betyder det (bland annat) att F är bijektiv.

b) Enligt samma sats 7.6 sid 213 har den inversa avbildningen F^{-1} (som existerar tack vare faktum att F är bijektiv) matrisen

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Eftersom F är bijektiv finns det exakt en vektor $\overrightarrow{u}$ som avbildas på $\overrightarrow{e_1}$, nämligen

$$\overrightarrow{u} = F^{-1}(\overrightarrow{e_1}) = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$$

Detta kan lätt kontrolleras genom att verka med F på högerledet:

$$\begin{aligned} F(3\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}) &= 3F(\overrightarrow{e_1}) - 4F(\overrightarrow{e_2}) + 2F(\overrightarrow{e_3}) = \\ &= 3(\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}) - 4(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}) + 2(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1} \end{aligned}$$

4. a) Vi behöver beräkna projektioner $P(\overrightarrow{e_1})$, $P(\overrightarrow{e_2})$ samt $P(\overrightarrow{e_3})$. Vi vet att

$$P(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} - \frac{\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}}\overrightarrow{n}$$

där $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$ och $\overrightarrow{n} = (1, 1, -1)$ är en vektor normal till planet Π. Enkel beräkning ger att $P(\overrightarrow{e_1}) = (2/3, -1/3, 1/3)$. På liknande sätt får vi $P(\overrightarrow{e_2}) = (-1/3, 2/3, 1/3)$ samt $P(\overrightarrow{e_3}) = 1/3, 1/3, 2/3)$. Således, avbildningsmatrisen har formen

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vi kan kontrollera (gör det!) att $A^2 = A$ så att A verkligen är en projektionsmatris. Man kan också kontrollera att $\det A = 0$ (om $\det A \neq 0$ har vi gjort något räknefel någonstans)

b) Projektionen l_p av linjen l på Π blir också en rät linje och dess riktningsvektor $\overrightarrow{v}_p$ kan fås som projektionen av linjen l's riktningsvektor $\overrightarrow{v} = (2, -3, 2)$ på planet Π. Detta ger

$$\overrightarrow{v}_p = P(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} - \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}}\overrightarrow{n} = (3, -2, 1).$$

Alternativt, vi kan hitta $\overrightarrow{v}_p$ genom att verka med matrisen A på $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{v}_p = A(\overrightarrow{v}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Linjerna l och l_p har en punkt P gemensam: skärningspunkten mellan l och Π. Den fås lätt genom att sätta in l's ekvation i Π's ekvation:

$$(2+2t)+(1-3t)-(2t)=0$$

vilket ger $t=1$ och således $P=(4,-2,2)$. Vi får alltså $l_p:(x,y,z)=(4,-2,2)+s(3,-2,1)=(4+3s,-2-2s,2+s)$. Vi kan även kontrollera svaret, genom att sätta in l_p's ekvation i Π's ekvation. Vi får

$$(4+3s)+(-2-2s)-(2+s)=0$$

vilket är uppfylld identiskt med avseende på parametern s. Det betyder att alla l_p's punkter verkligen ligger i Π. (3p)

5. Vi betraktar en linjär avbildning F av rummet som i en ON-bas har matrisframställningen

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) F är isometri eftersom $AA^t=E$, som enkel uträkning påvisar. Vidare, $\det A=-1$. Enligt Eulers sats (Sats 7.10 sid. 225) och dess bevis (sid. 226) är då avbildningen en rotation följd av en spegling (eller spegling följd av rotation; dessa bägge operationer kommuterar här ty spegelplanet (se igen beviset på sid. 226) är ortogonal mot rotationsaxeln).

b) Rotationsaxeln hittar vi genom att lösa ekvationen $F(\overrightarrow{u})=-\overrightarrow{u}$ (minus tillkommer pga spegling) vilken i den valda basen är $AX=-X$. Lösningen är $X=t(0,0,1)$ dvs rotationsaxeln sammanfaller med x_3-axeln. Rotationsvinkeln hittar vi genom att ta en godtycklig vektor i rotationsplanet $x_3=0$, t.ex. $\overrightarrow{u}=(1,0,0)$ och rotera den med avbildningen F. Eftersom

$$F\left(\overrightarrow{u}\right)=A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ser vi att $\overrightarrow{u}$ och $F\left(\overrightarrow{u}\right)$ är ortogonala (ty $\overrightarrow{u}\cdot F\left(\overrightarrow{u}\right)=0$). Det betyder att rotationsvinkeln är $\pi/2$.

6. a) Se boken, Sats 8.2 sid. 239.

b) Notera först att avbildningen är symmetrisk och den sökta basen således finns (enligt spektralsatsen, se uppgift a)). Vi börjar med att ta fram avbildningens egenvärden genom att hitta rötter till matrisens karakteristiska ekvation:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \equiv (\lambda+1)(\lambda-2)-4=\lambda^2-\lambda-6=0$$

som är $\lambda_1=-2$ och $\lambda_2=3$. Egenrum E_{λ_i} får vi genom att lösa ekvationerna $(A-\lambda_i)X=0$ och vi får $E_{\lambda_1}=t(-2,1)$ samt $E_{\lambda_2}=t(1,2)$. Notera att bägge egenrum är ortogonala mot varandra, såsom det skall vara enligt Sats 8.1 sid. 237. Den sökta basen får vi genom att plocka en vektor från varje egenrum och sedan normera den. Vi väljer då

$$\overrightarrow{f_1}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1),\quad \overrightarrow{f_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$$

Kontrollera gärna att $f=(\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2})$ verkligen är en ON-bas som består av egenvektorer till F.

c) A^{50} kan lättast uträknas i en ON-bas av egenvektorer. Vi använder basen som vi fick i uppgiften b). Basbytematrisen är

$$T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(den är givetvis ortogonal, eftersom både den gamla och den nya baser är ON; det betyder att $T^{-1} = T^t$) och avbildningen F har i den nya basen f diagonal form

$$A_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(med egenvärden på diagonalen; man kan, behöver inte, kontrollera detta genom att uträkna A_f på ett sedvänligt sätt, dvs. genom $A_f = T^{-1}AT$, det blir givetvis samma resultat). Detta ger till sist, tack vare "telescoping", se sid. 243 i boken)

$$\begin{aligned} A^{50} &= TA_f^{50}T^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{50} & 0 \\ 0 & 3^{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2^{52} + 3^{50} & -2^{51} + 2 \cdot 3^{50} \\ -2^{51} + 2 \cdot 3^{50} & 2^{50} + 4 \cdot 3^{50} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(obs: $(-2)^{50} = 2^{50}$ givetvis).

7. Antag att

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Då gäller förstås att

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \\ &= \lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) \end{aligned}$$

(kontrollera). Om vi nu ersätter λ med själva matrisen A i polynomet $p(\lambda)$ ovan får vi

$$\begin{aligned} p(A) &= A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - (a + d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

där den sista likhetstecken följer ur explicit uträkning av varje element i matrisen i vänsterledet. Till exempel, element $_{11}$ (dvs i rad 1 och kolumn 1) är lika med

$$a^2 + bc - a(a + d) + ad - bc = 0$$

och likaså för de tre övriga element.

Detta smått oväntade sambandet gäller även för godtyckliga $n \times n$ matriser. Detta samband kallas i matematiken *Cayley-Hamiltons sats*, och kan uttryckas på följande sätt:

Varje kvadratisk matris uppfyller sin egen karakteristiska ekvation

Notera till sist att det är *fel* att "bevisa" påståendet genom att skriva

$$p(A) = \det(A - AE) = \det(0) = 0$$

bland annat för att $p(A)$ är en matris medan determinant av en matris är ett tal.