Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
e-post: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i linjär algebra TNIU 75
för BI, SL, FTL
2020-01-08 kl. 08.00—13.00

1. a) Två $n \times n$ matriser A och B är varandras inverser om $AB = BA = E$ där E betecknar $n \times n$ enhetsmatris. Se def. 2.3 på sid. 53 i kursboken.

   b) Inversen A^{-1} till A kan beräknas med hjälp av Sats 2.5 sid. 57, genom att lösa ut X ur matrisekvationen $AX = Y$. Denna matrisekvation är ekvivalent med ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = y_1 \\ -x_1 & +2x_2 & & = y_2 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & = y_3 \end{cases}$$

   Genom att lösa detta system får man den entydiga, för varje givet högerled Y, lösningen

$$\begin{cases} x_1 = -4y_1 + y_2 + 6y_3 \\ x_2 = -2y_1 + y_2 + 3y_3 \\ x_3 = 3y_1 - y_2 - 4y_3 \end{cases}$$

   (och då vet vi att A^{-1} finns) som kan skrivas på matrisform som

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

   så att

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

   Genom en direktuträkning kontrollerar vi lätt att $AA^{-1} = E$.

2. Notera först att linjerna är parallella med varandra. För att ta fram en vektor normal till det sökta planet behöver vi ha två vektorer som ligger i (är parallella med) planet. En sådan vektor är linjernas gemensamma riktningsvektorn $\overrightarrow{v}_1 = (1, -2, -3)$. Varje vektor som förenar en godtycklig punkt P på l_1 med en godtycklig punkt Q på l_2 ligger också i planet. Om vi tar exempelvis $P = (1, 0, 2) \in l_1$ och $Q = (0, -1, -1) \in l_2$ så får vi $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{QP} = (1, 1, 3)$ som alltså också ligger i planet.

   En normalvektor till planet kan nu fås som vektorprodukt av $\overrightarrow{v}_1$ och $\overrightarrow{v}_2$:

$$\overrightarrow{n} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-3, -6, 3)$$

   och som $\overrightarrow{n}$ kan vi då enklast ta $\overrightarrow{n} = (1, 2, -1)$. Det sökta planet har således ekvationen $x + 2y - z + D = 0$ där D får vi genom att sätta i planets ekvation en godtycklig punkt som vi vet ligger i planet, exempelvis P. Vi får då $1 - 2 + D = 0$ eller $D = 1$. Så, det sökta planet är

$$x + 2y - z + 1 = 0$$

Det är enkelt att kontrollera att detta stämmer genom att se att bägge linjer ligger i planet. För linjen l_1 får vi

$$1 + t + 2(-2t) - (2 - 3t) + 1 = 0$$

oavsett värde på t så att alla punkter tillhörande l_1 ligger verkligen i planet. På samma sätt får vi för linjen l_2

$$t + 2(-1 - 2t) - (-1 - 3t) + 1 = 0$$

vilket innebär att även l_2 ligger i planet. Nu kan vi vara *säkra* på att lösningen ovan är korrekt.

3. Beteckna planet $2x - 2y + z = 0$ med Π. Det finns givetvis oändligt många ON-baser som uppfyller kravet i uppgiften. Vi börjar med att ta en vektor som ligger i planet, exempelvis $\overrightarrow{f}_1 = (1, 1, 0)$, och normerar den till $\overrightarrow{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$. Som $\overrightarrow{e}_2$ kan vi ta en *normerad normal* (det finns bara två sådana) till planet, det vill säga $\overrightarrow{e}_2 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$. Vektorprodukten $\overrightarrow{e}_3 = \overrightarrow{e}_1 \times \overrightarrow{e}_2$ kommer då dels att ligga i planet (rita en figur för att se detta) dels ha längd 1 så att $e = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ kommer att uppfylla kravet i uppgiften. Vi får

$$\overrightarrow{e}_3 = \overrightarrow{e}_1 \times \overrightarrow{e}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, -1, -4)$$

Notera faktorn $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ framför determinanten, vet du hur den uppstod? Således, en (av oändligt många) baser som uppfyller kravet är

$$\overrightarrow{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)\,, \quad \overrightarrow{e}_2 = \frac{1}{3}(2, -2, 1), \quad \overrightarrow{e}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, -1, -4)$$

Man kan lätt kontrollera (gör det) att det är en ON-bas och man ser att både $\overrightarrow{e}_1$ och $\overrightarrow{e}_3$ ligger i planet. Åter igen: rita en figur så att du förstår lösningen.

4. Vid en vridning avbildas varje ON-bas på en ON-bas. Det betyder att

$$R(\overrightarrow{e}_3) = R(\overrightarrow{e}_1) \times R(\overrightarrow{e}_2) = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(-6, 6, -3) = \frac{1}{3}\,(-2, 2, -1)$$

(notera igen faktorn $\frac{1}{9}$ framför determinanten ovan). Det betyder att avbildningsmatrisen är

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Kan vi testa resultatet? Javisst, vi kan lätt testa att $R(\overrightarrow{e}_i) \cdot R(\overrightarrow{e}_j) = 0$ for alla $i \neq j$. Vi kan även kontrollera att A är en matris som beskriver en rotation, genom att använda Eulers sats (Sats 7.10 sid. 225). Vi ser lätt att

$$AA^T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = E$$

och efter en kort beräkning ser vi även att det $A = 1$ (glöm då ej faktorn $\frac{1}{3}$ framför matrisen). Det betyder att A beskriver en ren rotation (utan spegling i rotationsplanet).

5. a) Se Sats 7.7, sid. 218.

   b) Detta är en standarduppgift. Nollrummet får vi genom att lösa ekvationen $AX = 0$ vilket ger $X = N(A) = t(-2, 0, 1)$. Enligt dimensionssatsen (se uppgiften 5a) måste då $V(A)$ ha dimension 2, $\dim(V(A)) = 2$, så $V(A)$ är ett plan genom origo. Eftersom $V(A)$ spänns upp av A:s kolonner och eftersom de två första kolonnerna $\overrightarrow{k}_1$ och $\overrightarrow{k}_2$ i A är linjärt oberoende (vi noterar också att $\overrightarrow{k}_3 = 2\overrightarrow{k}_1$ så att $\overrightarrow{k}_1$ och $\overrightarrow{k}_3$ inte är oberoende) kan vi få en normal till planet $V(A)$ genom att beräkna deras vektorprodukt. Vi får

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{k}_1 \times \overrightarrow{k}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = (3, -2, 1)$$

   vilket medför att värderummet $V(A)$ är ett plan genom origo som ges av $3x - 2y + z = 0$.

   Kan vi kontrollera dessa resultat? Det kan vi vist. Att kolla att $N(A) = t(-2, 0, 1)$ är lätt, det räcker att beräkna verkan av A på vektorn $\overrightarrow{v} = (-2, 0, 1)$ som skall spänna upp $N(A)$:

$$A\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Vidare, en godtycklig vektor $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ avbildas på vektorn $\overrightarrow{w}$

$$\overrightarrow{w} = A\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 3b + 2c \\ 2a + 7b + 4c \\ a + 5b + 2c \end{pmatrix}$$

   och vi måste visa att $\overrightarrow{w}$ ligger i planet $V(A)$, dvs. att $\overrightarrow{w}$:s komponenter uppfyller planets ekvation, oavsett värden på $\overrightarrow{v}$:s komponenter a, b, c. Vi får

$$3(a + 3b + 2c) - 2(2a + 7b + 4c) + (a + 5b + 2c) = 0$$

   vilket betyder att $\overrightarrow{w}$:s komponenter uppfyller planets ekvation (oavsett som sagt värden på a, b och c).

6. a) För definition av egenvektor och egenvärde, se boken. Vidare, ett egenrum tillhörande egenvärde λ ges av

$$E_\lambda = \{\overrightarrow{v} : A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}\}$$

   och är alltså med andra ord mängden av alla vektorer $\overrightarrow{v}$ som uppfyller ekvationen $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$ eller, vilket är samma sak, mängden av alla egenvektorer tillhörande egenvärdet λ.

   b) Detta är en mycket standard uppgift så jag bara anger svaret. Avbildningen har tre skilda reella egenvärden $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ och $\lambda_3 = 5$ med tillhörande egenrum $E_{\lambda_1} = t(0, -1, 2)$, $E_{\lambda_2} = t(1, 0, 0)$ och $E_{\lambda_3} = t(0, 2, 1)$. Detta kan lätt kontrolleras: vi kan ta en vektor $\overrightarrow{v}_i$ ur varje egenrum E_{λ_i} och kontrollera att denna vektor uppfyller ekvationen $A\overrightarrow{v}_i = \lambda_i\overrightarrow{v}_i$. Till exempel, om vi tar $\overrightarrow{v}_3 = (0, 2, 1) \in E_{\lambda_3}$ får vi

$$A\overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_3\overrightarrow{v}_3$$

   Notera till sist att resultatet stämmer väl med det faktum att avbildningen är symmetrisk och kan således diagonaliseras enligt spektralsatsen (Sats 8.2 sid. 239).

7. Eftersom för varje vektor $\overrightarrow{u}$ gäller att $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}|^2$ får vi att

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|^2 - |\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|^2 &= (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \\
&= |\overrightarrow{u}|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + |v|^2 - (|\overrightarrow{u}|^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + |\overrightarrow{v}|^2) = \\
&= 4\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}
\end{aligned}$$

v.s.v.