Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel 011-363320

Tentamen i linjär algebra TNIU 75

2004-03-08 kl. 08.00—13.00

Jour: Sixten Nilsson, tel. 011-363317, Mikael Ydén, tel. 011-363303
Lösningarna finns på **www.itn.liu.se/~krzma** from 2004-03-08 kl. 14.00.
Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift bedöms med 0-3p. För godkänt (3) krävs minst 8p samt minst 2 uppgifter bedömda 2p eller högre. För väl godkänd (4) respektive mycket väl godkänd (5) krävs 12 respektive 15 poäng. Inom parentes anges hur många poäng varje deluppgift är värd. Uppgifterna är *inte* sorterade efter svårighetsgrad.

1. a) Ange ett system av minst två linjära ekvationer med minst tre obekanta som saknar lösning. (1p)

   b) Bestäm de punkter som är gemensamma för följande tre plan: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$, $2x_1 + x_2 - x_3 = 2$ och $x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$. (2p)

2. Låt e_1, e_2, e_3 vara en höger ON-bas i det tredimensionella rummet $\mathbf{R}^3$. Låt $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara en avbildning som definieras genom
$$F(u) = e_1 \times u,$$
där $\times$ betecknar vektorprodukten. Visa att F är linjär. (1p) Ange F:s matris i basen e. (1p) Vad är bilden av $e_1 - 2e_2 + 3e_3$ under denna avbildning? (1p)

3. a) Definiera begreppen egenvektor och egenvärde. Hur beräknar man egenvektorer? (1p)

   b) Den linjära avbildningen $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ är en spegling (i ett plan) med en egenvektor $u = (1, 2, 3)$ med motsvarande egenvärde $\lambda = -1$. Bestäm spegelplanet (1p) samt avbildningsmatrisen till F i standardbasen. (1p)

4. Låt e_1, e_2, e_3 vara en bas i $\mathbf{R}^3$. Låt även $f_1 = e_3$, $f_2 = e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Visa att f_1, f_2, f_3 är en bas. (1p) Ange basbytematrisen från basen e till basen f samt koordinatsambandet mellan "gamla" och "nya" koordinater av samma vektor u i rummet. (1p) Ange koordinaterna för $2e_2 - f_3$ i båda baserna. (1p)

5. Ange den räta linje $y = ax + b$ som i minsta-kvadratmeningen passar bäst till följande uppsättning av mätpunkter (x_i, y_i): $(0, 0)$, $(1, 8)$, $(3, 8)$, $(4, 20)$. (3p)

6. a) Formulera dimensionssatsen för en linjär avbildning $F : U \to W$ mellan två allmänna vektorrum (1p)

   b) Låt $F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ vara en linjär avbildning som i standardbaser ges av matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   Bestäm konstanten α så att $\dim N(F) = 1$. (2p)

7. Låt $P_2(\mathbf{R})$ vara ett rum av polynom av grad ≤ 2. Visa att $F : P_2(\mathbf{R}) \to P_2(\mathbf{R})$ som ges av $F(p) = p'' + 2p' + p$ är linjär (som vanligt betyder p' och p'' första respektive andra derivatan av p med avseende på x). (1p) Visa att den är inverterbar och bestäm inversen F^{-1}, dvs. bestäm $F^{-1}(ax^2 + bx + c)$ för godtyckliga reella konstanter a, b, c. (2p)