Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar för kontrollskrivningen i linjär algebra TNIU 75

för BI1, DE1, MK1
2005-02-04 kl. 8.00—10.00

1. Naturligtvis löser vi systemet genom Gaussian elimination. Genom att multiplicera den första ekvationen med -2 och addera till den andra samt multiplicera den första med -1 och addera till den tredje får vi:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$
Genom att multiplicera den andra ekvationen i det sista systemet med 3 och addera till den tredje får vi
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_3 - 5x_4 = 2 \end{cases}$$
Ur detta kan vi lätt avläsa systemets lösning. Vi kan välja t.ex. x_4 som parameter: $x_4 = t \in \mathbf{R}$ och då får vi: $x_3 = 1 + \frac{5}{2}t$, $x_2 = x_4 = t$, $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4 = -\frac{9}{2}t$.

2. Först och främst måste vi konstatera att den sökta matrisen måste vara av typ 2×2. Ekvationen
$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
kan lättast lösas om vi multiplicerar den ledvis från vänster med inversen till den vänstra matrisen , dvs. med
$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$
Resultatet blir
$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
dvs
$$EX = X = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. a) Vi måste visa att vektorerna $\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2$ är linjärt oberoende, ty om de är linjärt oberoende så utgör de en bas i $\mathbf{R}^2$ (de spänner upp $\mathbf{R}^2$ då). Det syns direkt ty de är ej parallella. Formellt löser vi ekvationen
$$\lambda_1 \overrightarrow{f}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{f}_2 = 0$$

med avseende på λ_i. Detta ger att

$$\lambda_1 (2\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2) + \lambda_2 (3\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2) = (2\lambda_1 + 3\lambda_2)\overrightarrow{e}_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)\overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{0},$$

men eftersom vektorerna $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ är linjärt oberoende (de utgör ju en bas) så är den sista ekvationen ekvivalent med

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \end{cases}$$

vilket har enbart trivial lösning $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Således, vektorerna $\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2$ är linjärt oberoende.

b) Basbytematrisen från basen $\mathbf{e}$ till basen $\mathbf{f}$ är

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(koefficienterna av utveckling av $\overrightarrow{f}_j$ i basen $\mathbf{e}$ utgör j-te kolonn i matrisen T). Om vektorn $\overrightarrow{u}$ har koordinaterna (x_1, x_2) i basen $\mathbf{e}$ då har den i basen $\mathbf{f}$ koordinaterna (y_1, y_2) där

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

i.e. sambandet blir: $x_1 = 2y_1 + 3y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, som är lätt att lösa med avseende på y_i: $y_1 = -x_1 + 3x_2$, $y_2 = x_1 - 2x_2$. På köpet får vi T^{-1} (varför?):

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

c) Vektor $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2$ har i basen $\mathbf{e}$ koordinaterna $(x_1, x_2) = (2, -1)$. I den nya basen kommer den alltså ha koordinater

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(försök att rita situationen). Svaret kan lätt kollas, ty $-5\overrightarrow{f}_1 + 4\overrightarrow{f}_2 = -5(2\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2) + 4(3\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2) = \cdots = 2\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2$.

4. a) Se boken.

b) Låt $\overrightarrow{w} = (a, b, c)$ blir den sökta vektorn (eller snarare dess representation i den nämnda ON-basen). Eftersom den skall bli ortogonal både mot $\overrightarrow{u}$ och $\overrightarrow{v}$ måste den uppfylla två villkor: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ och $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$. Dessa leder till följande ekvationssystem för a, b, c:

$$\begin{cases} a + 4b + 2c &= 0 \\ 2a + 3b - 3c &= 0 \end{cases}$$

som har lösningen (Gauss): $a = \frac{18}{5}t$, $b = -\frac{7}{5}t$, $c = t$. Det betyder att samtliga vektorer (och enbart dessa) som är parallella med vektorn $(18, -7, 5)$ är ortogonala både mot $\overrightarrow{u}$ och $\overrightarrow{w}$.