Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningsförslag för tentamen i linjär algebra TNIU75
2004-03-11 kl. 08.00—13.00

1. De punkter (x, y, z) som ev. ligger i samtliga tre plan måste uppfylla följande ekvationssystem

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \\ 3x - y + 5z = 3 \end{cases}$$

Systemet är ekvivalent med (Gausselimination):

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -y - 3z = 1 \\ -7z = 2 \end{cases}$$

vilket leder till följande lösning: $(x, y, z) = (10/7, -1/7, -2/7)$ som är alltså gemensam punkt för alla tre plan.

2. a) Vi måste visa att ekvationssystemet

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

har enbart trivial lösning. Explicit, systemet ser ut så här:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

och har enbart (Gauss igen) trivial lösning.

b) Vi vill skriva $\overrightarrow{w} = (1, 0, 0)$ som linjär kombination av vektorerna $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3$. Vi söker alltså talen y_1, y_2, y_3 sådana att

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eller

$$\begin{cases} y_1 + 2y_3 = 1 \\ 2y_1 - y_2 = 0 \\ y_1 + y_2 - y_3 = 0 \end{cases}$$

vilket har lösningen $(y_1, y_2, y_3) = (1/7, 2/7, 3/7)$. Således, $\overrightarrow{w} = \frac{1}{7}\,\overrightarrow{u}_1 + \frac{2}{7}\overrightarrow{u}_2 + \frac{3}{7}\overrightarrow{u}_3$.

Alternativt, vi kan använda den välkända formeln $Y = T^{-1}X$ där

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

representerar $\overrightarrow{w}$'s koordinater i den gamla basen medan

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

är koordinaterna av $\overrightarrow{w}$ i den nya basen $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3)$. T är basbytematrisen och har formen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

med inversen

$$T^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

så att

$$Y = T^{-1}X = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

vilket stämmer med svaret som vi fått med hjälp av den första metoden.

3. a) Vi behöver beräkna projektioner $P(\overrightarrow{e}_1)$, $P(\overrightarrow{e}_2)$ samt $P(\overrightarrow{e}_3)$. Vi vet att

$$P(\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{e}_1 - \frac{\overrightarrow{e}_1 \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}} \overrightarrow{n}$$

där $\overrightarrow{e}_1 = (1, 0, 0)$ och $\overrightarrow{n} = (1, 1, -1)$ är en vektor normal till planet Π. Enkel beräkning ger $P(\overrightarrow{e}_1) = (2/3, -1/3, 1/3)$. På liknande sätt får vi $P(\overrightarrow{e}_2) = (-1/3, 2/3, 1/3)$ samt $P(\overrightarrow{e}_3) = 1/3, 1/3, 2/3)$. Således, avbildningsmatrisen har formen

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vi kan kontrollera att $A^2 = A$ så att A är verkligen en projektionsmatris.

b) Projektionen l_p av linjen l på Π blir också en rät linje och dess riktningsvektor $\overrightarrow{v}_p$ kan fås som projektionen av linjen l's riktningsvektor $\overrightarrow{v} = (2, -3, 2)$ på planet Π. Detta ger

$$\overrightarrow{v}_p = P(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} - \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}} \overrightarrow{n} = (3, -2, 1).$$

Alternativt, vi kan hitta $\overrightarrow{v}_p$ genom att verka med matrisen A på $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{v}_p = A(\overrightarrow{v}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Linjerna l och l_p har en punkt P gemensam: skärningspunkten mellan l och Π. Den fås lätt genom att sätta in l's ekvation i Π's ekvation:

$$(2+2t)+(1-3t)-(2t)=0$$

vilket ger $t=1$ och således $P=(4,-2,2)$. Vi får alltså $l_p:(x,y,z)=(4,-2,2)+s(3,-2,1)=(4+3s,-2-2s,2+s)$. Vi kan även kontrollera svaret, genom att sätta in l_p's ekvation i Π's ekvation. Vi får

$$(4+3s)+(-2-2s)-(2+s)=0$$

vilket är uppfylld identiskt med avseende på parametern s. Det betyder att alla l_p's punkter verkligen ligger i Π.

4. a) Se boken.

   b) Ur uppgiften följer att de båda riktningsvektorer, dvs. $\overrightarrow{v}_1=(1,-1,2)$ och $\overrightarrow{v}_2=(-1,1,7)$ är parallella med planet Π. Således, deras kryssprodukt

$$\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -9\overrightarrow{e}_1 - 9\overrightarrow{e}_2 = (-9,-9,0)$$

   blir en vektor som är normal till Π. Således, Π's ekvation blir $-9x-9y+D=0$ eller, efter förenkling, $x+y+E=0$. Vidare, punkten $P=(3,2,7)$ ligger i Π ty det är en punkt på l_1 (som motsvarar $t=0$). Sätter vi in denna punkt i planets ekvation får vi $E=-5$. Det sökta planet är alltså

$$x+y=5.$$

5. a) Se boken.

   b) Sekulärekvationen $\det(A-\lambda E)=0$ ger snabbt tre olika egenvärden: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=4$. Sätter vi in $\lambda_1=-2$ i ekvationen $(A-\lambda_1 E)X=0$ får vi ekvationen

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   som har lösningen

$$X = t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den första basvektorn blir då $\overrightarrow{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$ (vi normerar vektorn för att den skall ha längden 1). På samma sätt får vi $\overrightarrow{f}_2 = (1,0,0)$ samt $\overrightarrow{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$. Vi kan lätt kontrollera att denna bas verkligen är en ON-bas. Vi vet förstås att för symmetriska avbildningar (F är symmetrisk ty $A = A^t$ och basen $\overrightarrow{e}$ är ON) egenvektorer som motsvarar olika egenvärden är ortogonala så i princip vi behöver inte räkna ut $\overrightarrow{f}_3$ genom egenekvation utan vi kan få den som vektorprodukt av vektorerna $\overrightarrow{f}_1$ och $\overrightarrow{f}_2$.

6. Sätt

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Elementär beräkning leder till att $AA^t = E$ vilket betyder att matrisen A är ortogonal.

b) Vi har att

$$A\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_3) \\ x_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_3) \end{pmatrix},$$

vilket ger $|A\overrightarrow{x}|^2 = \frac{1}{2}\left((x_1 - x_3)^2 + 2x_2 + (x_1 + x_3)^2\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |\overrightarrow{x}|^2$, så att $|A\overrightarrow{x}| - |\overrightarrow{x}| = 0$. På liknande sätt visar man att $(A\overrightarrow{x}) \cdot (A\overrightarrow{y}) - \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = 0$. Detta naturligtvis därför att ortogonala avbildningar bevarar både skalarprodukten och längden av vektorer.

7. a) Se boken.

b) Låt $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara en linjär avbildning som i någon bas ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestäm för vilka värden på konstanten α blir dimensionen av nollrummet $N(A)$ lika med 1.

b) Vi ser att dimensionen av värderummet för F är minst 2, ty den första och sista kolonnerna i A är linjärt oberoende. Således, enligt dimensionssatsen, $\dim(N(F))$ kan ej överstiga 1. Å andra sidan, så snart $\det(A)$ är skild från noll består nollrummet bara av nollvektorn. Vi konstaterar att $\dim(N(F))$ blir 1 enbart då $\det(A) = 0$, vilket händer endast då $\alpha + 7 = 0$ dvs då $\alpha = -7$.