Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar för tentamen i linjär algebra TNIU75

2005-06-07 kl. 14:00—19:00

1. a) Se boken.

   b) Matrisen A är inverterbar precis då $\det(A) \neq 0$. En enkel beräkning leder till att $\det(A) = -2(a+12)(a-1)$ vilket ger att A är inverterbar så snart $a \neq -12$ och $a \neq 1$.

2. Basbytematrisen från basen $\overrightarrow{e}$ till basen $\overrightarrow{f}$ är

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   och har inversen

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Således, $\overrightarrow{w}$:s koordinater i den nya basen blir

$$T^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix},$$

   vilket är lätt att kontrollera:

$$-3\overrightarrow{f}_1+5\overrightarrow{f}_2+4\overrightarrow{f}_3 = -3(\overrightarrow{e}_1+\overrightarrow{e}_2)+5(\overrightarrow{e}_2-\overrightarrow{e}_3)+4(\overrightarrow{e}_1+2\overrightarrow{e}_3) = \overrightarrow{e}_1+2\overrightarrow{e}_2+3\overrightarrow{e}_3 = \overrightarrow{w}.$$

3. a) Se boken.

   b) Vi vet att $\left(\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right) = 0$ samt att $\left(\overrightarrow{a}+7\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right) = 0$ där $\cdot$ betyder skalärprodukt. Detta leder till följande ekvationssystem

$$\begin{cases} 2\,|\overrightarrow{a}|^2 + 5\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} - 3\left|\overrightarrow{b}\right|^2 = 0 \\ 2\,|\overrightarrow{a}|^2 + 15\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + 7\left|\overrightarrow{b}\right|^2 = 0 \end{cases}$$

   Om vi nu från ekvation 2 subtraherar ekvation 1 får vi $10\,\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + 10\left|\overrightarrow{b}\right|^2 = 0$ dvs $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = -\left|\overrightarrow{b}\right|^2$. Nu sätter vi in detta i ekvationen 1 (eller 2 - resultatet ändras inte) och får sambandet

$2\,|\vec{a}|^2 - 8\left|\vec{b}\right|^2 = 0$ vilket ger $|\vec{a}| = 2\left|\vec{b}\right|$. Således, om vinkeln mellan $\vec{a}$ och $\vec{b}$ betecknas med θ,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} = -\frac{\left|\vec{b}\right|^2}{2\left|\vec{b}\right|\left|\vec{b}\right|} = -\frac{1}{2}.$$

Eftersom $\theta \in [0,\pi]$ får vi att $\theta = 2\pi/3$.

4. Det är en klassiker. Linjernas riktingsvektorer är $\vec{v}_1 = (1,-1,0)$ respektive $\vec{v}_2 = (0,1,-1)$. Betrakta ett plan Π som innehåller linjen l_1 och är parallellt med linjen l_2. En vektor $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (1,1,1)$ är normal till Π (varför?), således har Π:s ekvation formen $x+y+z+D=0$. Konstanten D får vi om vi sätter en godtycklig punkt från l_1 (t.ex. $(-1,2,1)$ som motsvarar $t=0$) i planets ekvation. Vi får att Π:s ekvation är $x+y+z=2$. Det sökta avståndet d är nu lika med avståndet från l_2 till Π (alla punkter på l_2 ligger på samma avstånd från Π ty Π var konstruerad så att den blev parallell med l_2) som kan sökas på ett sedvanligt sätt: vi väljer en punkt på l_2 (t.ex. $P=(2,-1,3)$) och projicerar den ortogonalt (dvs längs $\vec{n}$) på Π. Projektionen av P blir $Q = (4/3,-5/3,7/3)$ (obs, $Q\in\Pi$, kolla!) och $d = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = 2/\sqrt{3}$.

5. Ur definition av egenvärden / egenvektorer ser vi att $P(\vec{v}_i) = \vec{v}_i$ vilket medför att vektorerna $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ spänner upp projektionsplanet Π. Planets normal blir således $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (4,-8,-4) = 4(1,-2,-1)$ (vi kan använda $(1,-2,-1)$ som normalen för att slippa den multiplikativa faktorn 4) och eftersom Π går genom origo får vi Π:s ekvation: $x-2y-z=0$. Projektionen avbildar $\vec{f}$ på Π enligt projektionsformeln (ON-bas):

$$P\left(\vec{f}\right) = \vec{f} - \frac{\vec{f}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n} = (8,0,2) - \frac{6}{6}(1,-2,-1) = (7,2,3) \in \Pi$$

6. Matrisen A kan tolkas som en matris för en linjär avbildning av rummet $\mathbf{R}^2$ given i en standard ON-bas $\vec{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Matrisen är symmetrisk så det finns en ON-bas av egenvektorer till A. Vi börjar med att hitta dem. Genom att lösa den karakteristiska ekvationen $\det(A-\lambda E) = 0$ får vi två stycken egenvärden: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 7$, med motsvarande egenvektorer $\vec{v}_1 = (-2,1)$ respektive $\vec{v}_2 = (1,2)$. De är - i överenskommelse med en viktig sats om symmetriska avbildningar - ortogonala. Genom att normera dem får vi en ON-bas av egenvektorer:

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\quad \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}. \tag{1}$$

I den nya basen $\vec{f} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ har avbildningen matrisen

$$A_f = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 7\end{pmatrix}$$

(diagonal med egenvärden på diagonalen). Å andra sidan, vi vet från en sats att $A_f = T^{-1}AT$, där T är basbytematrisen från basen e till basen f, som avläses direkt ur (1).

$$T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}.$$

Genom att multiplicera sambandet $A_f = T^{-1}AT$ med T från vänster och med T^{-1} från höger får vi att $A = TA_fT^{-1}$. Ur detta följer att

$$A^{50} = \left(TA_fT^{-1}\right)^{50} = \left(TA_fT^{-1}\right)\left(TA_fT^{-1}\right)\ldots\left(TA_fT^{-1}\right) = TA_f^{50}T^{-1}.$$

Vidare, $T^{-1} = T^t = T$ ty T är både ortogonal och symmetrisk. Vi får alltså

$$\begin{aligned} A^{50} &= T\begin{pmatrix} 2^{50} & 0 \\ 0 & 7^{50} \end{pmatrix} T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{50} & 0 \\ 0 & 7^{50} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4\cdot 2^{50} + 7^{50} & 2\left(7^{50} - 2^{50}\right) \\ 2\left(7^{50} - 2^{50}\right) & 2^{50} + 4\cdot 7^{50} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obs: poängen med uppgiften är att inse att vissa baser är bättre än andra. En ON-bas för matrisen A (om den finns) är bättre anpassad för olika algebraiska beräkningar som involverar A än andra baser.

7. a) En linjär avbildning F är isometri om den bevarar längd av vektorer, dvs. om

$$|F(\overrightarrow{u})| = |\overrightarrow{u}| \tag{2}$$

för *alla* vektorer $\overrightarrow{u} \in \mathbf{R}^3$ ($\mathbf{R}^n$ i allm.).

b) Först inser vi att isometrier bevarar även skalärprodukten mellan vektorer:

$$F(\overrightarrow{u}) \cdot F(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \text{ för alla vektorpar } \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}. \tag{3}$$

(för att inse detta räcker det att inse att $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{4}\left(|u+v|^2 - |u-v|^2\right)$ samt utnyttja linjäriteten hos F- se boken sid. 170 för detaljer). Antag nu att vinkeln mellan $\overrightarrow{u}$ och $\overrightarrow{v}$ är lika med med α och att vinkeln mellan $F(\overrightarrow{u})$ och $F(\overrightarrow{v})$ är lika med β. Vi får p.g.a. (2)-(3)

$$\cos\beta = \frac{F(\overrightarrow{u}) \cdot F(\overrightarrow{v})}{|F(\overrightarrow{u})|\,|F(\overrightarrow{v})|} = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}|} = \cos\alpha$$

och eftersom $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ måste $\alpha = \beta$.