Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningsförslag för tentamen i linjär algebra TNIU75

2004-08-22 kl. 08.00—13.00

1. a) Systemet

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2x - y - 3z = 6 \\ x - 2z = 4 \end{cases}$$

kan lätt lösas med hjälp av elementära radoperationer. Lösningen är 1-parametrisk: $(x, y, z) = (4 + 2t, 2 + t, t)$ där $t \in \mathbf{R}$.

b) Det är omöjligt: geometrisk representerar varje ekvation i systemet ett plan i rymden. Eftersom lösningen är 1-parametrisk så skär dessa plan varandra längst samma linje. Om nu en punkt tillhör två sådana plan, måste den ligga på denna linje och alltså tillhöra även det tredje planet.

2. a) Vi kan välja t.ex. $\overrightarrow{u}_3 = (1, 0, 0)$. För att visa att vi fick en bas räcker det (enligt sats 16 sid. 117) att beräkna determinanten ur matrisen vars rader (eller kolonner) består av våra vektorers koordinater. Vi beräknar alltså

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \neq 0.$$

Vektorerna är således linjärt oberoende och utför därför en bas i rymden.

b) För att skriva $\overrightarrow{w} = (1, 2, 3)$ i den nya basen måste vi lösa ekvationssystemet

$$\overrightarrow{w} = a_1 \overrightarrow{u}_1 + a_2 \overrightarrow{u}_2 + a_3 \overrightarrow{u}_3,$$

eller i koordinaterna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Detta leder till ett ekvationssystem.

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 1 \\ 2a_1 - a_2 = 2 \\ a_1 + a_2 = 3 \end{cases}$$

vars lösning är entydig (vi fick ju en bas) och blir $(a_1, a_2, a_3) = (5/3, 4/3, -2/3)$. Svaret är alltså

$$\overrightarrow{w} = \frac{5}{3} \overrightarrow{u}_1 + \frac{4}{3} \overrightarrow{u}_2 - \frac{2}{3} \overrightarrow{u}_3.$$

Observera även att andra val av $\overrightarrow{u}_3$ leder till andra resultat!

3. Vi beräknar först trippelprodukten (ON-bas!) $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = -24$. Volymen blir lika med trippelproduktens belopp, dvs 24.

4. a) Genom att sätta l_1 i planets ekvation får vi ekvationen $(2+t) - (1-t) + 2(2+3t) = 13$ vilket ger $t = 1$. P blir således

$$P = (2+1, 1-1, 2+3\cdot 1) = (3, 0, 5)$$

(vi kan lätt kolla att $P \in \Pi$). På liknande sätt hittar vi att $Q = (0, -7, 3)$. Vektorn $\overrightarrow{QP} = (3, 7, 2)$ från Q till P har längden

$$\left|\overrightarrow{QP}\right| = \sqrt{3^2 + 7^2 + 2^2} = \sqrt{62},$$

som är alltså lika med avståndet från P till Q.

b) Det sökta planet (säg Ω) innehåller vektorn $\overrightarrow{QP} = (3, 7, 2)$ och även vektorn $\overrightarrow{n} = (1, -1, 2)$ som är normal till Π. Således, vektorn

$$\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{n} = (16, -4, -10) = 2(8, -2, -5)$$

är normal till Ω (eller hur?), vars ekvation måste därför vara (vi dividerat med den onödiga faktorn 2)

$$8x - 2y - 5z + D = 0.$$

Konstanten D får vi genom att sätta in P (eller Q) i den sista ekvationen. Vi får att Ω:s ekvation blir

$$8x - 2y - 5z + 1 = 0.$$

5. a) Vi visar först att F är isometri genom att visa att $AA^t = E$ (elementär beräkning). Enligt Eulers sats om isometriska avbildningar (sid. 172) är då F antingen en rotation eller en spegling i ett plan följd av en rotation. Vidare, vi har att $\det(A) = -1$ så F måste vara en spegling + en rotation. Vi kollar nu vilka vektorer som uppfyller $F(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u}$ (dessa speglas på minus sig själva och är alltså normala till spegelplanet). Vi löser alltså ekvationen $AX = -X$ eller, i koordinaterna:

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

eller (efter enkla algebraiska omskrivningar)

$$\frac{1}{9}\left[\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Vi löser alltså ekvationssystem (den oväsentliga faktorn 1/9 kan vi bortse ifrån)

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & -8 \\ 4 & 16 & 4 \\ -8 & 4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

vars lösning är $(x, y, z) = t(2, -1, 2)$. Spegelplanets normal $\overrightarrow{n}$ är alltså lika med $\overrightarrow{n} = (2, -1, 2)$ och spegelplanet har ekvationen

$$2x - y + 2z = 0. \tag{1}$$

Vidare, vi måste visa att det inte blir någon rotation. Vi tar då en vektor i spegelplanet, t.ex. $(1, 0, -1)$ och verkar på den med matrisen A :

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vilket visar att vektorn $(1, 0, -1)$ rör sig inte under avbildningen. Det betyder att spegelplanet inte roterar under F:s verkan och således rotationsvinkeln är 0 dvs F är en ren spegling.

6. a) Se boken, sid. 177.

   b) Vi vet att $F(\overrightarrow{n}) = -\overrightarrow{n}$ så att $\overrightarrow{n}$ är en egenvektor med ett egenvärde -1. Dessutom, vektorn $\overrightarrow{u} = (1, 0, -1)$ ligger i spegelplanet så att $F(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ ($\overrightarrow{u}$ är också en egenvektor, med ett egenvärde 1, som är dessutom ortogonal till spegelplanets normalen $\overrightarrow{n}$. Till sist, vektorn $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n} \times \overrightarrow{u} = (1, 4, 1)$ är ortogonal både mot $\overrightarrow{n}$ och $\overrightarrow{u}$ och ligger således i spegelplanet (är alltså också en egenvektor med ett egenvärde 1). Om vi nu normerar dessa tre vektorer, får vi en ON-bas bestående av egenvektorer till F. Alltså

$$\overrightarrow{f}_1 = \frac{1}{|\overrightarrow{n}|}\overrightarrow{n} = \frac{1}{3}(2, -1, 2), \quad \overrightarrow{f}_2 = \frac{1}{|\overrightarrow{u}|}\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \quad \overrightarrow{f}_3 = \frac{1}{|\overrightarrow{v}|}\overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{18}}(1, 4, 1)$$

   är en sådan ON-bas.

   c) Enligt den allmänna teori får vi att F:s matris i den nya basen blir diagonal med respektive egenvärden på diagonalen:

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Se boken, sid. 178.