Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Tentamen i linjär algebra TNIU 75

för BI, DE, MK

2005-03-11 kl. 8.00—13.00

Jour: Owe Kågesten, tel. 0709-999390. Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift bedöms med 0-3p. För betyget n ($n = 3, 4, 5$) krävs $3n-1$ p. För att få full poäng måste du kommentera / förklara dina beräkningar. I parentes anges hur många poäng varje deluppgift är värd. Skriv på omslaget (i fältet Poäng/Credits) hur många bonuspoäng du har. *Kontrollera dina svar när det är möjligt!*

1. Undersök om det finns punkter som ligger samtidigt i följande tre plan:

$$x - y + 2z = 1, \quad x - 2y - z = 2, \quad 3x - y + 5z = 3$$

Om sådana punkter finns - bestäm dem. (3p)

2. a) Visa att vektorerna $\vec{u}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (0, -1, 1)$, $\vec{u}_3 = (2, 0, -1)$ (givna här i någon bas) är linjärt oberoende (således utgör de en bas i $\mathbf{R}^3$). (1.5p)

   b) Bestäm koordinaterna för vektorn $\vec{w} = (1, 0, 0)$ i basen $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. (1.5p)

3. Låt $P : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara en ortogonal projektion på planet $\Pi :\ x + y - z = 0$.

   a) Bestäm P's matris i standardbasen $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. (1p)

   b) Bestäm projektionen av linjen $l : (x, y, z) = (2 + 2t, 1 - 3t, 2t)$ på planet Π. (2p)

4. a) Definiera *vektorprodukten* av två vektorer. (1p)

   b) Ett plan Π innehåller linjen $l_1 : (x, y, z) = (3 + t, 2 - t, 7 + 2t)$. Planet är också parallellt med linjen $l_2 : (x, y, z) = (2 - s, 3 + s, 7s)$. Ange planets ekvation. (2p)

5. a) Definiera begreppen egenvektor och egenvärde. (1p)

   b) Den linjära avbildningen $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ har i en viss ON-bas $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   Ange en ON-bas bestående av egenvektorer till F. (2p)

6. Sätt

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

   a) Visa att matrisen A är ortogonal. (1p)

   b) Beräkna $|A\vec{x}| - |\vec{x}|$ samt $(A\vec{x}) \cdot (A\vec{y}) - \vec{x} \cdot \vec{y}$ (där $\cdot$ betecknar skalärprodukten) och kommentera resultatet. (1+1p).

7. a) Formulera dimensionssatsen. (1p)

   b) Låt $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara en linjär avbildning som i någon bas ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Bestäm för vilka värden på konstanten α blir dimensionen av nollrummet $N(A)$ lika med 1. (2p)