Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Tentamen i linjär algebra TNIU 75

för BI, DE, MK
2005-06-07 kl. 14:00—19:00

Jour: Krzysztof Marciniak, tel. 011-363320. Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift bedöms med 0-3p. För betyget n ($n = 3, 4, 5$) krävs $3n - 1$ p. För att få full poäng måste du kommentera / förklara dina beräkningar. I parentes anges hur många poäng varje deluppgift är värd. Skriv på omslaget (i fältet Poäng/Credits) hur många bonuspoäng du har. *Kontrollera alltid dina svar när det är möjligt!*

1. a) Definiera vad det betyder att en kvadratisk matris är inverterbar respektive ej inverterbar. (1p)

   b) Bestäm för vilka värden på konstanten a blir matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & 2 \\ 2 & 7 & -2 \\ a & -6 & 4 \end{pmatrix}$$
   inverterbar. (2p)

2. En vektor $\overrightarrow{w}$ har i en bas $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ koordinaterna $(1, 2, 3)$. Vi inför en ny bas $(\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \overrightarrow{f}_3)$ där
$$\overrightarrow{f}_1 = \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2, \quad \overrightarrow{f}_2 = \overrightarrow{e}_2 - \overrightarrow{e}_3, \quad \overrightarrow{f}_3 = \overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_3.$$
   Bestäm koordinaterna för vektorn $\overrightarrow{w}$ i den nya basen $(\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \overrightarrow{f}_3)$. (3p)

3. a) Definiera skalärprodukten av två vektorer $\overrightarrow{a}$ och $\overrightarrow{b}$. (1p)

   b) Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\overrightarrow{a}$ och $\overrightarrow{b}$ om man vet att $\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ är ortogonal mot $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ samt att $\overrightarrow{a} + 7\overrightarrow{b}$ är ortogonal mot $2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. (2p)

4. Beräkna avståndet mellan linjerna $l_1 = (-1 + t, 2 - t, 1)$ och $l_2 = (2, -1 + s, 3 - s)$ (givna här i någon ON-bas). (3p)

5. Låt P vara en ortogonal projektion på ett plan genom origo och låt $\overrightarrow{u} = (1, 2, -3)$ och $\overrightarrow{v} = (3, 2, -1)$ (givna i någon ON-bas) vara två P:s egenvektorer med samma egenvärde $\lambda = 1$.

   a) Bestäm projektionsplanet Π. (1.5p)

   b) Bestäm bilden $P(\overrightarrow{f})$ av vektorn $\overrightarrow{f} = (8, 0, 2)$ under projektionen P. (1.5p)

6. Beräkna A^{50} om $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. (3p)

7. a) Definiera vad det betyder att en linjär avbildning F är *isometri*. (1p)

   b) Visa att isometriska avbildningar bevarar vinkeln mellan två godtyckliga vektorer, dvs visa att vinkeln mellan vektorer $F(\overrightarrow{a})$ och $F(\overrightarrow{b})$ är samma som mellan vektorer $\overrightarrow{a}$ och $\overrightarrow{b}$. (2p)