Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Tentamen i linjär algebra TNIU 75

för BI, DE, MK

2005-08-22 kl. 8.00—13.00

Jour: Owe Kågesten, tel. 0709-999390. Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift bedöms med 0-3p. För betyget n ($n = 3, 4, 5$) krävs $3n-1$ p. För att få full poäng måste du kommentera / förklara dina beräkningar. I parentes anges hur många poäng varje deluppgift är värd. Skriv på omslaget (i fältet Poäng/Credits) hur många bonuspoäng du har. *Kontrollera dina svar när det är möjligt!*

1. a) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2x - y - 3z = 6 \\ x - 2z = 4 \end{cases}$$

(2p)

b) Kan du hitta någon punkt $P = (x, y, z)$ vars koordinater uppfyller bara två första ekvationer men inte den tredje? Motivera svaret! (1p)

2. a) Två vektorer $\overrightarrow{u}_1 = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{u}_2 = (0, -1, 1)$ (givna här i någon bas i $\mathbf{R}^3$) är givna. Välj en vektor $\overrightarrow{u}_3$ så att $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3)$ blir en bas i $\mathbf{R}^3$. **Visa** att du fick en bas. (1.5p)

b) Skriv vektorn $\overrightarrow{w} = (1, 2, 3)$ i den bas du fick. (1.5p)

3. Beräkna volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $\overrightarrow{u} = (1, -1, 2)$, $\overrightarrow{v} = (2, 3, -4)$ och $\overrightarrow{w} = (3, -1, -2)$ (ON bas).

4. Två linjer: $l_1 = (2+t, 1-t, 2+3t)$ och $l_2 = (t, -7-t, 3-2t)$ skär planet Π: $x-y+2z = 13$ i punkterna P resp. Q (ON-bas).

a) Beräkna avståndet mellan P och Q. (1p)

b) Ange ekvation för det planet som är ortogonal mot Π och som innehåller punkterna P och Q. (2p)

5. En linjär avbildning F har i någon ON-bas följande matrisframställning

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Visa att F är en spegling i ett plan och bestäm spegelplanet.

6. a) Definiera begreppen: *egenvektor* och *egenvärde.* (1p)

b) Ange en ON-bas som diagonaliserar avbildningen F ur uppgift 5. (1p)

c) Ange F:s matris i denna bas. (1p)

7. Visa att sekulärekvationen är invariant m.a.p. basbyte d.v.s. visa att om A_e är den linjära avbildningen F:s matris i basen $e = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ och A_f är F:s matris i en ny bas $f = (\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \overrightarrow{f}_3)$ där $f = eT$ (T är alltså basbytematrisen från e till f) så har vi att

$$\det(A_f - \lambda E) = \det(A_e - \lambda E)$$

där E är enhetsmatrisen.