Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar för kontrollskrivningen i linjär algebra TNIU 75

för BI1, TL1, MK1

2006-02-10 kl. 8.00—10.00

1. Dimensionsanalys visar att X måste vara en 2×1-matris (kolonnmatris), dvs:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

så antar ekvationen $A^2X = Y$ formen

$$\begin{cases} x_1 & - & 3x_2 & = & -1 \\ & & 4x_2 & = & 8 \end{cases}$$

vilket ger snabbt att $x_1 = 5$ och $x_2 = 2$ är den enda lösningen. Således, den enda matrisen som uppfyller kravet är

$$X = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. a) Se boken sid. 95.

b) Som det följer från Sats 5.10, sid. 143, vektorerna

$$\overrightarrow{u} = (1, 2, 0), \quad \overrightarrow{v} = (2, 0, 1), \quad \overrightarrow{w} = (0, 1, 2)$$

är linjärt oberoende, ty determinanten som uppstår när vi sätter in deras koordinater som kolonner i en matris är skild från noll:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$$

c) Eftersom dessa vektorer är linjärt beroende och 3 till antalet så bildar de en bas i rymden (se sid. 90).

3. a) Basbytematrisen från basen **e** till basen **f** är

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(koefficienterna av utveckling av $\overrightarrow{f}_j$ i basen **e** utgör j-te kolonn i matrisen T).

b) Således, basbytematrisen från basen **f** till basen **e** är

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Vektor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e}_1 - 2\overrightarrow{e}_2$ har i basen **e** koordinaterna

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

I den nya basen kommer den alltså ha koordinater

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

Således, $\overrightarrow{v} = \frac{2}{3}\overrightarrow{f}_1 - \frac{1}{3}\overrightarrow{f}_2$. Svaret kan lätt kollas, ty $\frac{2}{3}\overrightarrow{f}_1 - \frac{1}{3}\overrightarrow{f}_2 = \frac{2}{3}(2\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{e}_1 + 4\overrightarrow{e}_2) = \overrightarrow{e}_1 - 2\overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{v}$.

4. a) Se boken, sid. 131.

b) Enligt satserna 5.4 samt 5.5 sid. 136 resp. 137 så ges volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna

$$\overrightarrow{u} = (1, 2, -1), \quad \overrightarrow{v} = (3, 0, 0), \quad \overrightarrow{w} = (-1, 1, 2)$$

av

$$V = |(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}| = \pm \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \pm(-15) = 15.$$

Vi väljer $-$ i formeln ty annars får vi negativ volym. Detta betyder också att vektorerna $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ utgör ett vänsterorienterat (negativt orienterat) system.