Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen i linjär algebra TNIU 75

2006-06-07 kl. 14.00—19.00

1. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ y + az = a \end{cases}$$

löses med hjälp av Gauss. Efter första steget får vi

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 3 \\ y + az = a \end{cases}$$

Genom att subtrahera ekvation 2 från ekvation 3 får vi till sist

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 3 \\ (a-1)z = a-3 \end{cases}$$

Ifall $a \neq 1$ kan vi räkna ut successivt först z, sen y och till sist x. Vi får:

$$x = -2, \;\; y = \frac{2a}{a-1}, \; z = \frac{a-3}{a-1}$$

Ifall $a = 1$ antar den sista ekvationen formen $0 = a - 3$ som är omöjligt att uppfylla då och i detta fall saknar alltså systemet lösningar.

2. a) En bas i rummet är 3 linjärt oberoende vektorer.

b) Vi väljer först två icke-parallella vektorer i planet, t.ex. $(1, -1, 0)$ och $(1, 1, 1)$. Sen kompletterar vi dem till en bas i rummet med t.ex. $(0, 0, 1)$, som ligger ju utanför planet. Det blir en bas p.g.a. konstruktion. Men vi kan även kolla direkt detta genom att t.ex. använda determinantkriteriet:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

3. Linjen l skär planet Π vid tidpunkten t_0 sådant att punkten $(1 - t_0, 3 + t_0, -2t_0)$ uppfyller planets ekvation. Detta ger

$$1 - t_0 - 2(3 + t_0) + 3(-2t_0) = 4$$

dvs $t_0 = -1$. Således, l skär Π i punkten $S = (2, 2, 2)$. Vi behöver en punkt till på den projicerade linjen. För att få den projicerar vi en godtycklig punkt på l, t.ex. $P = (1, 3, 0)$ på Π längs $\overrightarrow{u}$. Vi tar alltså en linje l' genom P och parallell med $\overrightarrow{u}$, $l' : (1, 3, 0) + s(1, -1, 0) = (1 + s, 3 - s, 0)$. Denna insatt i Π:s ekvation ger oss

$$1 + s - 2(3 - s) = 4,$$

eller $s = 3$, som ger oss alltså en till punkt på den sökta linjen, $Q = (4, 0, 0)$. Det återstår bara att dra en linje genom S och Q

$$l'' : (2, 2, 2) + \sigma(4 - 2, 0 - 2, 0 - 2) = (2 + 2\sigma, 2 - 2\sigma, 2 - 2\sigma)$$

som är alltså den sökta linjen (med parametern σ). Svaret är rimligt, ty l'':s hastighetsvektorn $(2, -2, -2)$ är parallellt med planet (lätt att kolla genom att skalärmultiplicera den med planets normal: $(2, -2, -2) \cdot (1, -2, 3) = 0$.

4. Laserstrålen l träffar planet Π i punkten $S = (1 + t_0, -2t_0, 3)$ där t_0 uppfyller ekvationen

$$-3(-2t_0) + 4 \cdot 3 = 6$$

dvs där $t_0 = -1$. Således, $S = (0, 2, 3)$ och den reflekterade strålen l' utgår just från denna punkt. Vidare, den reflekterade strålen l':s riktiningsvektorn $\overrightarrow{v}_2$ fås som spegelbilden av l:s riktingsvektorn $\overrightarrow{v}_1 = (1, -2, 0)$. Således:

$$\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{v}_1 - 2\frac{\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}}\overrightarrow{n} = (1, -2, 0) - 2\frac{6}{25}(0, -3, 4) = \frac{1}{25}(25, -14, -48)$$

där $\overrightarrow{n} = (0, -3, 4)$ är en vektor normal till planet. Vi kan naturligtvis bortse från faktorn $\frac{1}{25}$ och ta $\overrightarrow{v}_2 = (25, -14, -48)$. Således, den reflekterade strålens ekvation blir

$$l' : (0, 2, 3) + s(25, -14, -48) \text{ med } s \geq 0 \text{ (strålen är en halvlinje).}$$

5. a) Se boken, sid. 225. (1p)

b) Vi kollar lätt att A är ortogonal: $AA^t = E$. Vidare, $\det(A) = 1$ så att avbildningen är en ren rotation. Det återstår att hitta rotationsaxeln samt rotationsvinkeln. Rotationsaxeln är en linje genom origo parallellt med en vektor $\overrightarrow{u}$ som uppfyller kravet $F(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ eller $AX = X$, dvs

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Löser vi detta får vi att

$$(x_1, x_2, x_3) = t(1, 0, 1)$$

vilket är alltså vår rotationsaxeln. Genom att ta en vektor i rotationsplanet $x_1 + x_3 = 0$ (alltså ortogonal mot rotationsaxeln) , t.ex. $\overrightarrow{v} = (0, 1, 0)$ och rotera den får vi en vektor $F(\overrightarrow{v})$ som har koordinaterna

$$F(\overrightarrow{v}) \sim A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Rotationsvinkeln blir då lika med vinkeln mellan $\overrightarrow{v}$ och $F(\overrightarrow{v})$ och den fås ur formeln:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{v} \cdot F(\overrightarrow{v})}{|\overrightarrow{v}|\,|F(\overrightarrow{v})|} = \frac{1}{3},$$

(observera att både $\overrightarrow{v}$ och F($\overrightarrow{v}$) har längden 1 - avbildningen F är ju en rotation som är alltså isometri) eller $\alpha = \arccos(1/3)$ vilket är ungefär 70°.

6. a) Alla vektorer parallella med $(1, 0, 1)$ (rotationsaxeln) är egenvektorer som tillhör ett enda egenvärde $\lambda = 1$. Det finns inga andra egenvärden/egenvektorer.

b) Det kan man inte göra: avbildningen är en rotation som saknar alltså en bas av egenvektorer. Det följer även ur svaret på del a).

Obs: uppgiften kan även lösas direkt genom att lösa matrisens egenproblem; det är dock onödig att genomföra denna beräkning om man gjort uppgiften 5.

7. Beräkningen är standard: man skickar en linje genom P ortogonal mot planet

$$l : (x_0, y_0, z_0) + t(A, B, C) = (x_0 + At, y_0 + Bt, z_0 + Ct)$$

och kollar var den träffar planet genom att stoppa in linjen i planets ekvation:

$$A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C(z_0 + Ct) + D = 0,$$

vilket ger

$$t_0 = \frac{-Ax_0 - By_0 - Cz_0 - D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Således, skärningspunkten mellan linjen och planet är

$$S = (x_0 + At_0, y_0 + Bt_0, z_0 + Ct_0).$$

Det sökta avståndet d ges av längden av vektorn $\overrightarrow{PS} = (At_0, Bt_0, Ct_0) = t_0(A, B, C)$, dvs

$$d = |t_0| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$