Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningsförslag för tentamen i linjär algebra TNIU75

2006-08-15 kl. 08.00—13.00

1. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

löses med hjälp av Gauss. Beräkningen är elementär (1:a ekv multipliceras med -1 och adderas till ekvationerna 2 och 3). Lösningen är 1-parametrisk:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(-5, 2, 0, 1)$$

2. En matris

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

kommuterar med matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

om och endast om $AB = BA$ eller

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Utför vi multiplikationen får vi

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_4 \\ 2x_1 + 3x_3 & 2x_2 + 3x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 & -x_1 + 3x_2 \\ x_3 + 2x_4 & -x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}.$$

Jämför vi dessa matriser får vi ett system av 4 linjära ekvationer vars lösning (Gauss igen) är 2-parametrisk:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-t + s, -\frac{1}{2}t, t, s\right)$$

Det betyder att mängden av matriser som kommuterar med A är också 2-parametrisk och ges (t.ex.) av

$$B = t\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observera att denna mängd innehåller även enhetsmatrisen E, vilket är självklart ty E kommuterar med alla matriser, inte enbart med A.

3. a) För att visa att vektorerna

$$\overrightarrow{u} = (1, -2, 3), \quad \overrightarrow{v} = (3, 7, -5), \quad \overrightarrow{w} = (7, 25, -21)$$

är linjärt beroende kan vi ställa de upp i en determinant och visa att determinanten är 0. Med tanke på uppgiften b) visar vi dock detta direkt. Vi löser alltså ekvationen

$$\lambda_1(1, -2, 3) + \lambda_2(3, 7, -5) + \lambda_3(7, 25, -21) = (0, 0, 0)$$

Explicit, systemet ser ut så här:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3 & = 0 \\ -2\lambda_1 + 7\lambda_2 + 25\lambda_3 & = 0 \\ 3\lambda_1 - 5\lambda_2 - 21\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Gauss (igen) ger oss en 1-parameterlösning: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = t(2, -3, 1)$. Detta betyder att vektorerna $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ är linjärt beroende.

b) Enligt punkten a) har vi att

$$2t\overrightarrow{u} - 3t\overrightarrow{v} + t\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$$

för alla värden på parametern t, bl.a. för $t = 1$. Således

$$2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$$

ur vilket följer genast att

$$\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}.$$

4. Planen är parallella - det ser man direkt när man skriver om det andra planet som $x - y + 3z + 15 = 0$. Man kan alltså prata om det ortogonala avståndet mellan dem. Vi väljer nu en punkt P på det första planet, t.ex. $P = (7, 0, 0)$ och vi drar en rät linje l genom P som är ortogonala mot de bägge planen. l har ekvationen

$$l : (7, 0, 0) + t(1, -1, 3) = (7 + t, -t, 3t).$$

Sätter vi in detta i det andra planets ekvation får vi

$$7 + t - (-t) + 3(3t) + 15 = 0$$

vilket ger $t = -2$. Således, l skär det andra planet i punkten $Q = (5, 2, -6)$. Avståndet mellan planen är densamma som avståndet mellan punkterna P och Q:

$$d = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = |(-2, 2, -6)| = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}.$$

Pga att $t = -2$ i Q får vi naturligtvis att avståndet d är lika med längden av den normala vektorn $(1, -1, 3)$ multiplicerad med $|t| = 2$.

5. a) Varje symmetrisk avbildning har en ON-bas av egenvektorer.

b) Vi räknar först ut avbildningens egenvärden dvs vi löser den sekulara ekvationen:

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$$

vilket ger en enkelrot $\lambda_1 = 1$ samt en dubbelrot $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. Vi hittar nu de tillhörande egenvektorerna. Ekvationen $(A - \lambda_1 E)X = 0$ har formen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som har lösningen $t(-1, 1, 0)$. Vi vet att alla egenvektorer som tillhör det andra egenvärdet måste bli ortogonala till $(-1, 1, 0)$ (ty F är symmetrisk) så vi får den första vektorn av den sökta ON-basen genom att normera $(-1, 1, 0)$, dvs vi tar

$$\overrightarrow{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0).$$

Egentligen är våra bekymmer slut, för varje två ortonormala vektorer som ligger i planet ortogonalt mot $\overrightarrow{f}_1$ och genom origo kommer att komplettera $\overrightarrow{f}_1$ till en ON-bas av egenvektorer (vet du varför?). Vi väljer dock den hårda vägen och räknar helt enkelt ut egenvektorer tillhörande $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. Vi får $(A - \lambda_2 E)X = 0$ eller

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dvs $x_1 = x_2$, x_3 godt. Således, lösningen blir $(x_1, x_2, x_3) = (s, s, t) = s(1, 1, 0) + t(0, 0, 1)$. Vi har tur ty $(1, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$ är redan ortogonala (och även naturligtvis ortogonala till $\overrightarrow{f}_1$). Således, det räcker att normera dem och vi får en ON-bas bestående av avbildningens egenvektorer:

$$\overrightarrow{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)\,, \quad \overrightarrow{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \quad \overrightarrow{f}_3 = (0, 0, 1).$$

6. För att få matriserna för R_1 samt R_3 undersöker man bilder av basvektorer. Vi får

$$R_1 \sim A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

samt att

$$R_3 \sim A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Således,

$$R_1 \circ R_3 \sim A_1 A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

samt

$$R_3 \circ R_1 \sim A_3 A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dessa operationer kommuterar inte. Det syns t.ex. pga att $A_1 A_3 \neq A_3 A_1$.

7. a) Antag att $\overrightarrow{u} \in N(F)$. Det betyder att $F(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ och således att $F(\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = 0$ för alla vektorer $\overrightarrow{v}$ i rummet. Men F är symmetrisk så att det betyder även att $\overrightarrow{u} \cdot F(\overrightarrow{v}) = 0$ för alla $\overrightarrow{v}$, och eftersom alla $F(\overrightarrow{v})$ konstituerar $V(F)$ så är $\overrightarrow{u}$ ortogonal mot samtliga vektorer i $V(F)$.

   b) Enligt dimensionssatsen måste då $V(F)$ vara ett plan genom origo, och enligt a) måste detta plan vara ortogonal mot $N(F)$. Således, $V(F)$ är ett plan som ges av ekvationen

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$