Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningsförslag för tentamen i linjär algebra TNIU75
2006-03-13 kl. 08.00—13.00

1. a) En $n \times n$ matris B är invers till $n \times n$ matrisen A om $AB = BA = E$ (i själva verket om $AB = E$ så är $BA = E$ också).

   b) Matrisekvationen $AB = B + A^t$ kan skrivas som $AB - B = A^t$ eller $(A - E)B = A^t$. Men

$$\det(A - E) = \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

   så att $A - E$ är inverterbar (Sats 7.6) och således ekvationen $(A - E)B = A^t$ kan lösas genom ledvis multiplikation med $(A - E)^{-1}$. Detta ger lösningen :

$$B = (A-E)^{-1}A^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -8 & -7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. a) Se boken, sid. 203.

   b) Eftersom basbytematrisen från basen $\underline{e} = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ till basen $\underline{f} = (\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \overrightarrow{f}_3)$ är:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   så har vi att

$$\overrightarrow{f}_1 = \overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2 \text{ samt } \overrightarrow{f}_3 = -2\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_3.$$

   Således

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} &= 5\overrightarrow{f}_1 + 4\overrightarrow{f}_3 = 5(\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2) + 4(-2\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_3) = \\ &= -3\overrightarrow{e}_1 - 5\overrightarrow{e}_2 + 4\overrightarrow{e}_3, \end{aligned}$$

   så att vektorn $\overrightarrow{u}$ har i basen $\underline{e}$ koordinaterna $(-3, -5, 4)$.

3. a) Vinkeln mellan två plan ges av vinkeln α mellan deras normalvektorer (ifall α är en spetsig vinkel; ifall den är trubbig är vinkeln mellan planen $\beta = \pi - \alpha$). Eftersom $\overrightarrow{n}_1 = (1, 2, -2)$ samt $\overrightarrow{n_2} = (1, -1, 4)$ får vi

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n}_1 \cdot \overrightarrow{n}_2}{|\overrightarrow{n}_1|\,|\overrightarrow{n}_2|} = \frac{-9}{\sqrt{9}\sqrt{18}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

   vilket ger $(0 \leq \alpha \leq \pi)$ att $\alpha = \frac{3}{4}\pi$ (vilket är en trubbig vinkel). Således, vinkeln mellan planen är $\pi - \alpha = \frac{1}{4}\pi$.

b) Skärningslinjen mellan dessa plan består av punkter (x, y, z) som ligger både i Π_1 och i Π_2 dvs dem som uppfyller ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ x - y + 4z = 19 \end{cases}$$

Gausselimination ger lösningen: $(x, y, z) = (13, -6, 0) + t(-2, 2, 1)$ (skärningslinjen på parameterform).

4. Den sökta vinkeln α är naturligtvis lika med vinkeln mellan de ortogonala projektionerna $P(\overrightarrow{v}_1)$ samt $P(\overrightarrow{v}_2)$ av linjernas riktningsvektorer $\overrightarrow{v}_1$ och $\overrightarrow{v}_2$ på det givna planet (ifall den är spetsig osv). Vi behöver således ej att explicit beräkna dessa projicerade linjer, ännu mindre deras skärningspunkt! En normal till planet är $\overrightarrow{n} = (1, -1, -1)$ medan $\overrightarrow{v}_1 = (-2, 3, 1)$ samt $\overrightarrow{v}_2 = (1, 3, 1)$. Vidare, enligt projektionsformeln

$$\begin{aligned} P(\overrightarrow{v}_1) &= \overrightarrow{v}_1 - \frac{\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|^2}\overrightarrow{n} = (-2, 3, 1) - \frac{-6}{3}(1, -1, -1) = (-2, 3, 1) + 2(1, -1, -1) = (0, 1, -1) \\ P(\overrightarrow{v}_2) &= \overrightarrow{v}_2 - \frac{\overrightarrow{v}_2 \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|^2}\overrightarrow{n} = (1, 3, 1) - \frac{-3}{3}(1, -1, -1) = (1, 3, 1) + (1, -1, -1) = (2, 2, 0) \end{aligned}$$

Den sökta vinkeln ges alltså av

$$\cos\alpha = \frac{P(\overrightarrow{v}_1) \cdot P(\overrightarrow{v}_2)}{|P(\overrightarrow{v}_1)|\,|P(\overrightarrow{v}_2)|} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \frac{1}{2}.$$

Således, $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ (den är spetsig så den är OK).

5. Den sekulara ekvationen har formen $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ med två skilda reella rötter $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 5$. Samtliga egenvektorer som tillhör λ_1 får vi genom att lösa ekvationen $(A - \lambda_1 E)X = 0$ som antar formen

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

med lösningrn $(x_1, x_2) = t(-2, 1)$. På samma sätt kollar vi lätt att samtliga egenvektorer som tillhör egenvärdet λ_2 har formen $t(1, 1)$. Således en (bland många) bas bestående av egenvektorer till A är $\overrightarrow{f}_1 = (-2, 1)$, $\overrightarrow{f}_2 = (1, 1)$ (lätt att kolla att dessa är egenvektorer, gör det!).

b) Vi kollar lätt att $A^2 - 4A - 5E = 0$ (2×2 nollmatrisen). Det är ingen slump: varje kvadratisk matris uppfyller sin egen sekularekvation (sk Cayley-Hamiltonsasten, se boken sid. 344 eller andra böcker för mer detaljer kring denna intressanta sats).

6. Först diagonaliserar vi matrisen A. Den karakteristiska ekvationen är $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ vilket ger två skilda reella egenvärden: $\lambda_1 = -1$ samt $\lambda_2 = 3$. Motsvarande egenvektorer är t.ex. $\overrightarrow{u}_1 = (1, 2)$ och $\overrightarrow{u}_2 = (-1, 2)$. Således, vi betraktar en ny bas $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$ bestående av två egenvektorer. Enligt den allmänna teori kommer matrisen (som motsvarar ju en avbildning F i vår "ursprungliga" bas - säg $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$) ha en diagonal form i den nya basen. Mer precis, avbildningen F har i den nya basen den diagonala matrisen

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Eftersom basbytematrisen från basen $\underline{e}$ till basen $\underline{f}$ är

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

så är $D = T^{-1}AT$ eller $A = TDT^{-1}$. Således

$$\begin{aligned} A^n &= TD^nT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2((-1)^n + 3^n) & (-1)^n - 3^n \\ 4((-1)^n - 3^n) & 2((-1)^n + 3^n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7. a) Se boken, sid. 218.

   b) Nollrummet $N(F)$ av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -11 \end{pmatrix}$$

får vi genom att lösa ekvationen $AX = 0$ eller

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauss ger snabbt att lösningen är en-parametrisk:

$$(x_1, x_2, x_3) = t(-2, 3, 1)$$

Nollrummet är alltså en linje genom origo parallell med vektorn $(-2, 3, 1)$. Enligt dimensionssatsen måste således $\dim V(F) = 2$ så att $V(F)$ är ett plan genom origo. Den spänns således upp av t.ex. två första kolonnvektorer i A (ty de är ej parallella). Vi får alltså en normal till planet $V(F)$ genom att vektormultiplicera dessa kolonnvektorer (i vår ON-bas). Vi får

$$\overrightarrow{n} = (2, 1, -1) \times (0, 1, 3) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (4, -6, 2)$$

så att värderummets ekvation är $4x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$ eller $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$ (samma resultat fås naturligtvis om basen inte är ON - vet du varför?).