Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar till kontrollskrivningen i linjär algebra TNIU 75
för BI1, TL1, MK1, ES1

2007-02-09 kl. 8.00—10.00

1. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = \frac{5}{2} \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

löses t.ex. med hjälp av Gaussian elimination. Efter första steget får vi ett nytt system (dock med samma lösningsmängd):

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = \frac{5}{2} \\ 7x_2 - 5x_3 = -7 \\ 7x_2 - 5x_3 = -7 \end{cases}$$

Ekvationerna 2 och 3 är identiska och vi kan stryka en av dessa. Genom att sätta (t.ex.) $x_3 = t$ får vi från den andra ekvationen att $x_2 = -1 + \frac{5}{7}t$ vilket enligt den första ekvationen leder till

$$x_1 = 3x_2 - 2x_3 + \frac{5}{2} = -3 + \frac{15}{7}t - 2t + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{7}t.$$

Lösningen blir således 1-parametrisk och har formen

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{7}t, -1 + \frac{5}{7}t, t\right).$$

2. Man ser ganska lätt att om $\overrightarrow{u} = (3, 4, -3)$, $\overrightarrow{v} = (2, 4, -2)$, $\overrightarrow{w} = (0, -4, 0)$ så är $2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$ så att dessa tre vektorer är linjärt beroende och således kan ej utgöra någon bas i rummet. För att räkna sig fram till detta samband (t.ex. om man inte ser det i början) kan vi utgå från ekvationen

$$\lambda_1\overrightarrow{u} + \lambda_2\overrightarrow{v} + \lambda_3\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$$

som i koordinaterna antar formen

$$\lambda_1(3, 4, -3) + \lambda_2(2, 4, -2) + \lambda_3(0, -4, 0) = (0, 0, 0)$$

eller

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_1 + 4\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Vi ser att första och tredje ekvationerna är ekvivalenta så vi stryker den tredje (säg). Sätter vi $\lambda_1 = t$ (obs!) får vi successivt att $\lambda_2 = -\frac{3}{2}t$ och $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{1}{2}t$. Vi har alltså visat att

$$t\overrightarrow{u} - \frac{3}{2}t\overrightarrow{v} - \frac{1}{2}t\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$$

för alla värden på t, så att detta gäller även för t.ex. $t = 2$. Sätter vi in detta värde på t i det senaste sambandet får vi det sökta linjära sambandet:

$$2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}.$$

3. a) Vektorerna $3\overrightarrow{e}_1 - 4\overrightarrow{e}_2$ och $4\overrightarrow{e}_1 + 3\overrightarrow{e}_2$ är ortogonala ty deras skalarprodukt är 0:

$$(3\overrightarrow{e}_1 - 4\overrightarrow{e}_2) \cdot (4\overrightarrow{e}_1 + 3\overrightarrow{e}_2) = 12 - 12 = 0.$$

(uträkningen sker ju i ON-basen $\mathbf{e}$). Normerar vi dem får vi en ny ON-bas:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f_1} &= \frac{3\overrightarrow{e}_1 - 4\overrightarrow{e}_2}{|3\overrightarrow{e}_1 - 4\overrightarrow{e}_2|} = \frac{3}{5}\overrightarrow{e}_1 - \frac{4}{5}\overrightarrow{e}_2 \\ \overrightarrow{f_2} &= \frac{4\overrightarrow{e}_1 + 3\overrightarrow{e}_2}{|4\overrightarrow{e}_1 + 3\overrightarrow{e}_2|} = \frac{4}{5}\overrightarrow{e}_1 + \frac{3}{5}\overrightarrow{e}_2 \end{aligned}$$

b) Basbytematrisen från basen $\mathbf{e}$ till basen $\mathbf{f}$ avläser vi direkt från sambandet ovan och får

$$T = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Basbytematrisen från basen $\mathbf{f}$ till basen $\mathbf{e}$ blir då

$$T^{-1} = T^t = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

($T^{-1} = T^t$ ty basbytematrisen mellan två ON-baser är alltid ortogonal - sats 4.3 sid. 121).

c) Eftersom vektorn $\overrightarrow{e}_1 - 3\overrightarrow{e}_2$ har i basen $\mathbf{e}$ koordinaterna

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

så ges dess koordinater i basen $\mathbf{f}$ av (sats 3.5 sid. 104):

$$Y = T^{-1}X = T^tX = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 15 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

dvs $\overrightarrow{e}_1 - 3\overrightarrow{e}_2 = 3\overrightarrow{f}_1 - \overrightarrow{f}_2$. För att vara på den säkra sidan kontrollerar vi vårt resultat:

$$3\overrightarrow{f}_1 - \overrightarrow{f}_2 = 3\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{e}_1 - \frac{4}{5}\overrightarrow{e}_2\right) - \left(\frac{4}{5}\overrightarrow{e}_1 + \frac{3}{5}\overrightarrow{e}_2\right) = \overrightarrow{e}_1 - 3\overrightarrow{e}_2 \quad \text{(ok!)}$$

4. a) Se boken, sid. 129 resp. 137.

b) Genom Laplace får vi att

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} &= x(x^2-1) + 2(1-x) = x(x-1)(x+1) - 2(x-1) = \\ &= (x-1)(x(x+1)-2) = (x-1)(x^2+x-2) = (x-1)^2(x+2). \end{aligned}$$

Räknar vi med Sarrus får vi naturligtvis samma sak:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = x^3 + 1 + 1 - x - x - x = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2).$$

(i det sista steget måste vi gissa en rot, t.ex. $x = 1$ och tillämpa faktorsatsen = grundkursen). Således, ekvationen har formen

$$(x-1)^2(x+2) = 0$$

med lösningar $x_1 = x_2 = 1$ (dubbelrot) samt $x_3 = -2$.