Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningarna till tentamen i linjär algebra TNIU 75

för BI, TL, MK, ES, OI

2007-03-10 kl. 8.00—13.00

1. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 867 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & ax_3 & = & 235 \\ ax_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -197 \end{cases}.$$

är entydigt lösbart om och endast om systemets matris är icke-singulär (Sats 7.6 sid. 211) dvs om och endast om

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & a \\ a & 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Determinanten ovanför är dock lika med (Sarrus eller Laplace) $a - a^2$ och är noll endast för $a = 0$ eller $a = 1$. Således, systemet är entydigt lösbart för alla a utom 0 och 1.

2. a) Man kan visa att vektorerna $\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \overrightarrow{f}_3$ utgör en ny bas i rummet genom att visa direkt att de är linjärt oberoende. Det är dock enklare att använda sig av det kända determinantkriteriet (Sats 5.10 sid. 143):

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Kriteriet ger alltså att dessa tre vektorer är linjärt oberoende och således utgör de en bas i rummet.

b) Som vanligt, den sökta basbytematrisens kolonner utgörs av komponenter av de nya basvektorerna i den gamla basen, dvs

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) $\overrightarrow{u}$:s koordinater i basen $\mathbf{e}$ blir $X = TY$ där Y är $\overrightarrow{u}$:s koordinater i basen $\mathbf{f}$ och X är $\overrightarrow{u}$:s koordinater i basen $\mathbf{e}$ (enligt regeln "gamla koordinater = $T\cdot$nya), det vill säga

$$X = TY = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

i.e. $\overrightarrow{u} = 8\overrightarrow{e}_1 + 5\overrightarrow{e}_2 - 4\overrightarrow{e}_3$. Detta kan även uträknas direkt:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} &= \overrightarrow{f}_1 + 2\overrightarrow{f}_2 + 3\overrightarrow{f}_3 = \\
&= 2\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2 + 3\overrightarrow{e}_3 + 2(3\overrightarrow{e}_2 - 5\overrightarrow{e}_3) + 3(2\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_3) = \\
&= 8\overrightarrow{e}_1 + 5\overrightarrow{e}_2 - 4\overrightarrow{e}_3.
\end{aligned}$$

3. a) Laserstrålen är en linje l_1 med parameterekvationen

$$(x, y, z) = P + t\overrightarrow{v} = (1, -1, 2) + t(-2, 3, 7) = (1 - 2t, -1 + 3t, 2 + 7t).$$

Laserstrålen skär planet Π precis då värdet på parametern t är sådant att linjens ekvation $(1 - 2t, -1 + 3t, 2 + 7t)$ uppfyller även planets ekvation. Detta ger

$$2(1 - 2t) + 3(-1 + 3t) + 2 + 7t = 7,$$

eller $12t = 6$ dvs för $t = \frac{1}{2}$. Sätter vi in detta värde i l_1 får vi den sökta punkten:

$$S = \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2}, -1 + 3 \cdot \frac{1}{2}, 2 + 7 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right).$$

Det är lätt att se att $S \in \Pi$.

b) Vi skickar nu från P en linje l_2 som är normal (i.e. ortogonal) mot planet Π. Således, $l_2 : (x, y, z) = (1, -1, 2) + s(2, 3, 1)$. Normalen skär planet i en punkt som vi kallar Q. På samma sätt som i uppgiften a) beräknar vi tiden s när normalen skär planet och får att $s = \frac{6}{14}$. Således, sträckan $\overrightarrow{PQ}$ blir

$$\overrightarrow{PQ} = (1, -1, 2) + \frac{6}{14}(2, 3, 1) - (1, -1, 2) = \frac{6}{14}(2, 3, 1).$$

Det sökta avståndet blir således

$$d = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \frac{6}{14}\left|(2, 3, 1)\right| = \frac{6}{14}\sqrt{4 + 9 + 1} = \frac{6}{\sqrt{14}}.$$

4. a) Se boken (Def. 5.2 sid. 131).

b) Volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $(1, 0, 4)$, $(0, 1, 2)$ och $(2, -3, 0)$ (ON-bas) ges av

$$\pm V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

så att $V = 2$.

5. a) Se boken (Sats 7.7 sid. 218)

b) Som vi vet spänns värderummet $V(F)$ av kolonnvektorer av matrisen A. Kolonnerna 1 och 2 är linjär beroende (den andra $= 2\cdot$den första) medan kolonnerna 1 och 3 är linjärt oberoende och utgör således en bas för värderummet $V(F)$. $V(F)$ är alltså ett plan genom origo med en normal

$$\overrightarrow{n} = \mathrm{col}_1 \times \mathrm{col}_3 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-8, -4, 1)$$

(där $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ är den ON-bas avbildningen ges i) dvs planet $8x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$. Enligt dimensionssatsen måste då nollrummet $N(F)$ vara en linje genom origo. Nollrummet $N(F)$ hittar vi genom att lösa matrisekvationen $AX = 0$ vilket ger

$$X = t\overrightarrow{v} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in R.$$

Det är lätt att kontrollera resultatet:

$$F(\overrightarrow{v}) \backsim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \backsim \overrightarrow{0}.$$

6. a) Se boken (Sats 8.2, sid. 239).

   b) Avbildningen är symmetrisk (ty $A = A^T$) så den sökta ON-basen finns säkert enligt spektralsatsen. Vi börjar med egenvärden och löser den karakteristiska ekvationen

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -6 \\ -6 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(11-\lambda) - 36 = \lambda^2 - 13\lambda - 14.$$

   Dess rötter är $\lambda_1 = 14$ samt $\lambda_2 = -1$. Motsvarande egenvektorer får vi om vi löser matrisekvationerna $(A - \lambda_i E)X = 0$ vilket ger $\overrightarrow{v}_1 = (1, -2)$ och $v_2 = (2, 1)$ (de är ortogonala ty avbildningen är symmetrisk men de är ej normerade än). Normerar vi dessa egenvektorer får vi en ON-bas bestående av egenvektorer till F:

$$\overrightarrow{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2), \quad \overrightarrow{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1).$$

7. Om A är F:s matris i någon ON-bas så är A både symmetrisk (dvs $A = A^T$) och ortogonal (dvs $AA^T = E$). Ur detta följer snabbt att $A^2 = E$ dvs $F^2 = I$. Således, om $F(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$ så är $\overrightarrow{u} = F^2(\overrightarrow{u}) = F(F(\overrightarrow{u}) = F(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda F(\overrightarrow{u}) = \lambda^2\overrightarrow{u}$ eller $\lambda^2 = 1$. Exempel på ett sådant avbildning är spegling i ett plan genom origo eller spegling i en linje genom origo. Finns det andra exempel?