Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar för tentamen i linjär algebra TNIU 75
för BI, TL, MK, ES, OI
2007-06-08 kl. 8.00—13.00

1. Ekvationssystemet
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$
löses naturligtvis med hjälp av Gauss. Efter första steget antar systemet formen
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 1 \end{cases}$$
och det syns att lösningen blir två-parametrisk. Om vi väljer x_3 och x_4 som parametrar: $x_4 = t$, $x_3 = s$ så får vi att
$$x_2 = 5x_3 + 4x_4 + 1 = 1 + 5s + 4t$$
och till sist
$$x_1 = x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 + 5s + 4t - 2s - t = 1 + 3s + 3t.$$
Lösningen blir således
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 0) + s(3, 5, 1, 0) + t(3, 4, 0, 1)$$
(i.e. ett tvådimensionell plan i $\mathbf{R}^4$). Din lösning behöver naturligtvis ej vara av samma form med den måste beskriva samma plan.

2. Per definition, två matriser, säg A och B, kommuterar om $AB = BA$. Detta betyder att de måste vara kvadratiska och av samma dimension (typ). I vårt fall betyder detta att vi söker efter alla 2×2 matriser
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$
som uppfyllerv matrisekvationen
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$
eller
$$\begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 & 2x_2 + x_4 \\ 3x_1 + 7x_3 & 3x_2 + 7x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 & x_1 + 7x_2 \\ 2x_3 + 3x_4 & x_3 + 7x_4 \end{pmatrix}.$$

Denna matrisekvation ger ekvationssystemet (kolla!)

$$\begin{cases} x_3 = 3x_2 \\ x_4 = x_1 + 5x_2 \\ 3x_1 + 5x_3 = 3x_4 \end{cases}$$

som har lösningen $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-5s + t, s, 3s, t)$. Således, mängden av alla matriser som kommuterar med den givna matrisen är två-parametrisk och ges av

$$s\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Den innehåller naturligtvis enhetsmatrisen E (som kommuterarar ju med alla matriser) för $s = 0$ and $t = 1$.

3. a) Vi behöver veta hur basvektorerna $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0)$ samt $\overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1)$ avbildas under projektionen P. Projektionen P är den ortogonala projektionen på linjen l som har riktningsvektor $\overrightarrow{v} = (1, 2, -2)$ och således vi kan använda oss av projektionsformeln:

$$P(\overrightarrow{e_1}) = \frac{\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}\overrightarrow{v} = \frac{1}{9}(1, 2, -2).$$

På samma sätt får vi

$$P(\overrightarrow{e_2}) = \frac{\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}\overrightarrow{v} = \frac{2}{9}(1, 2, -2)$$

samt

$$P(\overrightarrow{e_3}) = \frac{\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}\overrightarrow{v} = -\frac{2}{9}(1, 2, -2).$$

Således, matrisen A är

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Eftersom A är matrisen för en projektion P (så att $P^2 = P$ vilket ger $A^2 = A$) så är $A^2 - A = 0$. Detta kan kontrolleras med en direkt uträkning.

4. a) Se boken (Sats 7.7 sid. 218).

b) Naturligtvis, värderummet $V(P)$ är linjen l projektionen sker på. Eftersom projektionen är ortogonal så är nollrummet $N(P)$ ett plan genom origo och ortogonal mot linjen l. Som dess normal kan således tas linjens riktningsvektor $\overrightarrow{v} = (1, 2, -2)$ vilket betyder att nollrummets ekvation är $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$.

5. a) Se boken (Sats 7.10 sid. 225)

b) Vi kollar lätt att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

är ortogonal: $AA^T = E$ så den representerar isometri. En inte alltför svår uträkning (som utnyttjar trigettan $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$) ger dessutom att $\det(A) = -1$. Eulers sats ger oss då resultatet.

6. Vi skall uträkna A^n genom att först diagonalisera matrisen. Enkla uträkningar ger att A har två skilda egenvärden: $\lambda_1 = 14$ samt $\lambda_2 = -1$ och en ON-bas av egenvektorer

$$\overrightarrow{f_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2), \quad \overrightarrow{f_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$$

(där $\overrightarrow{f_1}$ motsvarar λ_1 och $\overrightarrow{f_2}$ motsvarar λ_2). Basbytematrisen från basen $\mathbf{e}$ till basen $\mathbf{f}$ blir då

$$T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

och är naturligtvis ortogonal dvs $T^{-1} = T^t$. Vidare, vi vet att matrisen i den nya basen $\mathbf{f}$ antar diagonalform

$$A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Å andra sidan, $A_f = T^{-1}AT$ så att $A = TA_fT^{-1}$. Vi har då

$$\begin{aligned} A^n &= \underbrace{TA_fT^{-1} \cdot TA_fT^{-1} \cdot \ldots \cdot TA_fT^{-1}}_{\text{n gånger}} = TA_f^nT^{-1} = \\ &= T\begin{pmatrix} 14^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}T^t = [\text{enkel uträkning}] = \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 14^n + 4\cdot(-1)^n & -2\cdot 14^n + 2\cdot(-1)^n \\ -2\cdot 14^n + 2\cdot(-1)^n & 4\cdot 14^n + (-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observera att A^n är symmetrisk ty A är symmetrisk. Observera även att formen gäller egentligen för alla $n \in \mathbf{Z}$ (i.e. för alla heltal, inklusive $n = 0$).

7. Beviset finns i boken på sidan 237.