Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-mail: krzma@itn.liu.se

# Lösningar till tentamen i linjär algebra TNIU 75

för BI, TL, MK, ES, OI

2007-08-15 kl. 8.00—13.00

1. Matrisen $X$ i ekvationen skall vara av typ $2 \times 1$. Således, ekvationen har formen

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

och är ekvivalent med tre skalära ekvationer:

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 1 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$$

som kan lösas t.ex. med hjälp av Gauss. Lösningen är entydig: $x = 2, y = -1$. Den enda matrisen som löser ekvationen är alltså

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. a) Se boken (Def. 4.1 sid. 111).

b) Beteckna vinklarna vid hörnen $A, B$ och $C$ respektive med $\alpha, \beta$ och $\gamma$. Vi har

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(1, -2, 0) \cdot (1, 3, 0)}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = -\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = -\sqrt{\frac{5}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

vilket ger

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4}\pi.$$

På samma sätt

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{(-1, 2, 0) \cdot (0, 5, 0)}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

så att

$$\beta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Till sist:

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{(-1, -3, 0) \cdot (0, -5, 0)}{5\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

så att

$$\gamma = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

3. Vi observerar först att de både planen är parallella (de har parallella normalvektorer). Vi väljer en punkt i planet $\Pi_1 : 2x-y+3z = 7$, säg $P = (0,-7,0)$ och vi skickar den ortogonal på planet $\Pi_2 : 2x - y + 3z = 21$. Vi tar alltså linjen $l$ som utgår från $P$ och vars riktningsvektor är lika med $\Pi_1$:s normalvektor:

$$l : (x, y, z) = (0, -7, 0) + t(2, -1, 3) = (2t, -7 - t, 3t).$$

Linjen $l$ skär $\Pi_2$ då $t$ antar värdet som gör att den löpande punktens koordinater uppfyller $\Pi_2$:s ekvation:

$$2 \cdot 2t - (-7 - t) + 3 \cdot 3t = 21$$

alltså då $t = 1$ vilket ger att $l$ skär $\Pi_2$ i $Q = (2\cdot 1, -7-1, 3\cdot 1) = (2, -8, 3)$. Avståndet mellan planen ges nu av

$$d = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = |(2, -1, 3)| = \sqrt{14}.$$

4. a) För att bestämma $S$:s avbildningsmatris måste vi undersöka vad händer med basvektorerna $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ under avbildningen. Ur projektionsformeln följer att

$$S(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} - 2\frac{\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}}\overrightarrow{n} = (1,0,0) - 2\frac{3}{14}(3,-2,-1) = \frac{1}{14}(-4, 12, 6).$$

där $\overrightarrow{n} = (3, -2, -1)$ är en vektor normal till planet. På samma sätt får vi $S(\overrightarrow{e_2})$ och $S(\overrightarrow{e_3})$:

$$S(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2} - 2\frac{\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}}\overrightarrow{n} = (0,1,0) - 2\frac{-2}{14}(3,-2,-1) = \frac{1}{14}(12, 6, -4)$$

$$S(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_3} - 2\frac{\overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}}\overrightarrow{n} = (0,0,1) - 2\frac{-1}{14}(3,-2,-1) = \frac{1}{14}(6, -4, 12)$$

(observera faktor 2 i formeln). Således, speglingens matris blir

$$A = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -4 & 12 & 6 \\ 12 & 6 & -4 \\ 6 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

b) Eftersom avbildningen är en spegling så måste det $A = -1$. Detta kan naturligtvis också visas genom direkt uträkning (fullständigt onödig dock).

5. a) Ett naturligt val är $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$ (då blir $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ ett vänsterorienterad system och dessutom blir $\overrightarrow{w}$ automatisk ortogonal mot både $\overrightarrow{u}$ och $\overrightarrow{v}$). Således

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (2, 3, 2).$$

b) Basbytematrisen blir

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Vi har

$$\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3} + 2\overrightarrow{e_1} = 3\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3},$$

så att $\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{e_1}$ har i basen $\mathbf{e}$ koordinaterna $(3, 0, -1)$. I den nya basen blir dess koordinater då

$$Y = T^{-1}X = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 4 & 6 & -13 \\ 3 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 25 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Resultatet bör kontrolleras genom följande uträkning:

$$\begin{aligned} \frac{1}{17}(25\overrightarrow{u} + 6\overrightarrow{v} + 4\overrightarrow{w}) &= \frac{1}{17}[25(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3}) + 6(3\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2}) + 4(2\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3})] = \\ &= \frac{1}{17}(51\overrightarrow{e_1} - 17\overrightarrow{e_3}) = 3\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3}. \end{aligned}$$

Observera också att man kan välja en godtycklig *positiv* mulitpel av $\overrightarrow{w}$ istället av $\overrightarrow{w}$. Detta påverkar svaret men accepteras naturligtvis.

6. (Att diagonalisera en linjär avbildning innebär att ange en bas i vilken avbildningens matris är diagonal, dvs en bas bestående av avbildningens egenvektorer). Eftersom avbildningen är en spegling i planet $3x - 2y - z = 0$ så vet vi att varje vektor normal till planet är avbildningens egenvektor med motsvarande egenvärde $\lambda_1 = -1$ (varför?). Vidare, alla vektorer i spegelplanet rör sig inte under speglingen och är därför också avbildningens egenvektorer fast tillhörande egenvärde $\lambda_2 = 1$. Således, som en bas som diagonaliserar avbildningen kan vi ta en vektor normal till planet, t.ex. $(3, -2, -1)$ samt två godtyckliga icke-parallella vektorer som ligger i spegelplanet, t.ex. $(1, 0, 3)$ och $(0, -1, 2)$. Du inser själv att det finns en hel uppsjö av baser som diagonaliserar vår avbildning.

   Samma resultat kan också fås genom direkt uträkning via karakteristiska ekvationen etc.

7. Om

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

så är

$$\det A \det B = (ad - bc)(eh - gf) = adeh - adgf - bceh + bcgf.$$

Å andra sidan

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

så att

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (ae + bg)(cf + dh) - (ce + dg)(af + bh) = \\ &= aecf + aedh + bgcf + bgdh - ceaf - cebh - dgaf - dgbh = \\ &= aedh + bgcf - cebh - dgaf = \det A \det B. \end{aligned}$$

Om det är nu bevisat så kan vi gå vidare: $1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}$ så att den andra regeln gäller. Till sist:

$$\det(\alpha A) = \alpha a \cdot \alpha d - \alpha c \cdot \alpha b = \alpha^2 (ad - bc) = \alpha^2 \det(A).$$