Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till kontrollskrivningen i linjär algebra TNIU 75
för BI1, SL1

2008-02-08 kl. 8.00—10.00

1. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

inverteras genom direkt beräkning:

$$\begin{aligned} AX &= Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} x_1 & & +x_3 & = y_1 \\ -x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = y_2 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & = y_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{[Gauss elimination]} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} x_1 = & 4y_1 & +y_2 & -2y_3 \\ x_2 = & 5y_1 & +2y_2 & -3y_3 \\ x_3 = & -3y_1 & -y_2 & +2y_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow X = A^{-1}Y \end{aligned}$$

Ur detta följer att

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. a) Vi antar alltså att $\mathbf{e} = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ är en ON-bas. Det betyder att $\overrightarrow{e}_1 \cdot \overrightarrow{e}_2 = 0$ samt att $|\overrightarrow{e}_1| = |\overrightarrow{e}_2| = 1$. Vi skall nu kolla om den nya basen

$$\overrightarrow{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2), \quad \overrightarrow{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2),$$

är också ON. Vi ser att

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}_1 \cdot \overrightarrow{f}_2 &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2) \cdot (\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2) = \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{e}_1 \cdot \overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_1 \cdot \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_2 \cdot e_1 - \overrightarrow{e}_2 \cdot e_2) = \frac{1}{2} (1 - 0 + 0 - 1) = 0 \end{aligned}$$

så att $\overrightarrow{f}_1$ är ortogonal till $\overrightarrow{f}_2$. Dessutom

$$\left|\overrightarrow{f}_1\right| = \sqrt{\overrightarrow{f}_1 \cdot \overrightarrow{f}_1} = \sqrt{\frac{1}{2} (\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2) \cdot (\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2)} = \sqrt{1} = 1,$$

och på samma sätt visar vi att $\left|\overrightarrow{f}_2\right| = 1$. Det betyder att basen $\left(\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2\right)$ är ON.

b) Basbytematrisen T från basen $\mathbf{e}$ till basen $\mathbf{f}$ ges av

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

och är ortogonal (vilket betyder att $T^{-1} = T^t$) ty det är en basbytematris mellan två ON-baser (Sats 4.3 sid. 121). Detta ger att koordinater (y_1, y_2) av $\overrightarrow{u}$ i den nya basen ges av

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Det betyder att $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 3)$ i den nya basen eller att

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\overrightarrow{f}_1 + 3\overrightarrow{f}_2\right).$$

Detta kontrolleras genom att "räkna tillbaka":

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\overrightarrow{f}_1 + 3\overrightarrow{f}_2\right) = \frac{1}{2} \left(-\left(\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2\right) + 3\left(\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2\right)\right) = \overrightarrow{e}_1 - 2\overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{u},$$

så att vår uträkning stämmer.

3. a) Se boken kap. 4.

   b) En vektor $\overrightarrow{w} = (x, y, z)$ är parallell både mot $\overrightarrow{u} = (1, 2, -1)$ och $\overrightarrow{v} = (1, -2, 3)$ då och endast då $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ och $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. Dessa ekvationer, skrivna i den gällande basen, blir

$$x + 2y - z = 0 \text{ respektive } x - 2y + 3z = 0.$$

   Detta ekvationssystem har 1-parameterslösning

$$(x, y, x) = t(-1, 1, 1).$$

   Det betyder att samtliga vektorer parallella med vektorn $(-1, 1, 1)$ (och enbart dessa) är ortogonala både mot $\overrightarrow{u}$ och $\overrightarrow{v}$.

   Givetvis, problemet kan även lösas med hjälp av vektorprodukten: lösningen består ju av samtliga vektorer parallella med $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$. Resultatet är som ovan.

4. a) Se boken, kap. 5.

   b) Vektorerna

$$\overrightarrow{u} = (1, 2, a), \quad \overrightarrow{v} = (a, 1, 1), \quad \overrightarrow{w} = (1, -1, 1)$$

   är linjärt beroende då och endast då (Sats 5.10 sid. 143) determinanten vars rader (eller kolonner, det ger samma sak ty det $A = \det A^t$) består av vektorernas koordinater är lika med noll. Men

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 3a - a^2$$

   som är noll om och endast om $a = -4$ eller $a = 1$.