Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen i linjär algebra TNIU 75

för BI, OI, SL

2008-03-08 kl. 8.00—13.00

1. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

löses med hjälp av Gausselimination. Efter första steget (där ekvation 1 multipliceras med -3 och adderas till ekvation 2) får vi

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ \qquad 2x_2 - 4x_3 + 12x_4 = -2 \end{cases}.$$

Lösningen blir således 2-parametrisk. Om vi sätter t.ex. $x_3 = s$ och $x_4 = t$ får vi lösningsmängden

$$x_1 = 1 - 3t, \quad x_2 = -1 + 2s - 6t, \quad x_3 = s, \quad x_4 = t.$$

2. a) Vi antar alltså att $\mathbf{e} = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ är en bas i rummet. Vektorerna

$$\overrightarrow{f}_1 = 2\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3, \quad \overrightarrow{f}_2 = 2\overrightarrow{e}_2 - 2\overrightarrow{e}_3, \quad \overrightarrow{f}_3 = \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_3$$

utgör då en bas om och endast om de är linjär oberoende. Determinantkriterium (Sats 5.10 sid. 143) ger att eftersom

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

så är $\overrightarrow{f}_i$ linjärt oberoende och utgör alltså en bas i rummet.

b) Basbytematrisen från basen $\mathbf{e}$ till $\mathbf{f}$ är

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) $\overrightarrow{u}$ har koordinater $(1, 0, 1)$ i basen $\mathbf{f}$. Dess koordinater i basen $\mathbf{e}$ blir då (enligt regeln "nya $= T^{-1}$ gamla")

$$X = TY = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Således, $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2 + 2\overrightarrow{e}_3$. Detta kan även uträknas direkt:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}_1 + \overrightarrow{f}_3 = (2\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3) + (\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_3) = 3\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2 + 2\overrightarrow{e}_3.$$

3. Vi börjar med att bestämma planets ekvation. Vi vet att punkterna $A = (0,1,0)$, $B = (1,2,-1)$ samt $C = (2,2,3)$ ligger i planet Π. Således, vektorerna

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (1,1,-1) \text{ samt } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = (2,1,3)$$

spänner upp planet och därför är deras vektorprodukt normal till planet. Vi får alltså att

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (4,-5,-1)$$

är normal till planet Π. Det betyder att Π:s ekvation måste ha formen $4x - 5y - z + D = 0$ där konstanten D får vi genom att sätta in en av punkterna A, B, C i Π:s ekvation. Vi får då att $D = 5$ så att Π:s ekvation är

$$4x - 5y - z + 5 = 0.$$

För att bestämma det ortogonala avståndet mellan Π och P betraktar vi en linje l genom P ortogonal mot Π. Linjen l har ekvationen

$$l\colon \quad (x,y,z) = P + t\overrightarrow{n} = (1,1,1) + t(4,-5,-1) = (1+4t, 1-5t, 1-t).$$

l skär Π vid tidpunkten t_0 då l uppfyller även planets ekvation, dvs då

$$4(1+4t_0) - 5(1-5t_0) - (1-t_0) + 5 = 0$$

vilket ger $t_0 = -\frac{1}{14}$. Således, det sökta avståndet blir

$$d = |t_0|\,|\overrightarrow{n}| = \frac{1}{14}\sqrt{4^2+5^2+(-1)^2} = \frac{1}{14}\sqrt{42} = \sqrt{\frac{3}{14}}.$$

4. Volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $\overrightarrow{u} = (1,2,-7)$, $\overrightarrow{v} = (-3,2,4)$ samt $\overrightarrow{w} = (3,1,-5)$ ges av (höger ON-bas!):

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -7 \\ -3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 43 > 0 \text{ (OK)}.$$

5. a) Enkel uträkning visar att $AA^t = E$ så att F är isometri. Vidare, $\det A = +1$ så attvilket visar (se beviset av Eulers sats 7.10, sid. 225) att F är en rotation.

b) Rotationsaxeln hittar vi genom att lösa ekvationen $F(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$. I basen $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ antar denna ekvation formen $AX = X$ eller

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Lösningen av detta system (t.ex. via Gauss) är

$$(x_1, x_2, x_3) = t(1,0,0)$$

som är alltså rotationsaxeln. Rotationsplanet (det plan som är ortogonal mot rotationsaxeln och innehåller origo) ges därför av ekvationen $x_1 = 0$. Rotationsvinkeln får vi nu genom att välja en vektor i rotationsplanet, säg $\overrightarrow{f} = (0,1,0)$, och rotera den med avbildningen F. Koordinaterna för $F(f)$ är

$$Y = AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och rotationsvinkeln α är lika med vinkeln mellan $\overrightarrow{f}$ och $F(\overrightarrow{f})$ som beräknas på ett standard sätt:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{f} \cdot F(\overrightarrow{f})}{\left|\overrightarrow{f}\right| \left|F(\overrightarrow{f})\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Detta ger $\alpha = \pi/4$.

6. Avbildningen F är symmetrisk (ty dess matris är symmetrisk i en ON-bas) så att - enligt spektralsatsen - den säkert har en ON-bas av egenvektorer (vi vet alltså att det vi letar efter verkligen existerar). Vi börjar med den karakteristiska ekvationen :

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = 0.$$

Denna ekvation har rötterna $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (dubbelrot) och $\lambda_3 = 5$ (-1 kan gissas och 5 får vi t.ex. via faktorsatsen, se grundkursen). Vi letar nu efter tillhörande egenvektorer. Vi börjar med den dubbla roten $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$:

$$(A - \lambda_1 E)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Detta ger alltså bara en ekvation $x_1 - x_3 = 0$ som har lösningen $(x_1 x_2 x_3) = (t, s, t) = s(0,1,0) + t(1,0,1)$. Vi ser alltså att vektorerna $\overrightarrow{f}_1 = (0,1,0)$ och $\overrightarrow{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ är ortonormala och samtidigt är de egenvektorer till F som tillhör samma egenvärde -1 (de spänner upp egenrummet $x_1 + x_3 = 0$ tillhörande till egenvärdet $\lambda_1 = \lambda_2$). Vi vet då (Sats 8.1 sid. 237) att en egenvektor tillhörande λ_3 måste vara ortogonal både mot $\overrightarrow{f}_1$ och $\overrightarrow{f}_2$. Som den sista basvektorn kan vi då helt enkelt ta $\overrightarrow{f}_3 = \overrightarrow{f}_1 \times \overrightarrow{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$. Per konstruktion, vektorerna $\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \overrightarrow{f}_3$ bildar nu en höger ON-bas av egenvektorer till avbildningen F. Om vi dock är ej upplysta om att Sats 8.1 existerar så kan vi leta efter $\overrightarrow{f}_3$ på det sedvanliga sättet:

$$(A - \lambda_3 E)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vilket ger $x_2 = 0$ samt $x_1 + x_3 = 0$ så att lösningen blir $(x_1, x_2, x_3) = t(1,0,-1)$. Vi ser att vi kan ta $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ (dvs. $\overrightarrow{f}_3$) som den sista basvektorn.

7. a) Se Sats 7.7, sid. 218.

   b) Nollrummet $N(P)$ blir förstås en linje genom origo ortogonal mot planet, så att $N(P) = t(13,-11,83)$. Vidare, värderummet blir förstås lika med projektionsplanet, dvs. $13x_1 - 11x_2 + 83x_3 = 0$.