Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-mail: krzma@itn.liu.se

# Lösningar till tentamen i linjär algebra TNIU 75

för BI, OI, SL

2008-06-02 kl. 8.00—13.00

1. Eftersom $A$ är en $2 \times 2$ matris:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
så måste matrisen $X$ också vara av typ $2 \times 2$ för att upfylla sambandet:
$$AX = A + E$$
(varför?). Vidare, eftersom $\det A = -4 \neq 0$ så är $A$ inverterbar. Multiplicerar vi sambandet ovan med $A^{-1}$ från vänster får vi
$$X = E + A^{-1}.$$
Eftersom
$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$
får vi att
$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Enligt Stas 7.6 (en av de viktigaste satserna på kursen) är varje matris inverterbar då och endast då $\det A \neq 0$. Eftersom
$$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 2a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a - a^2 = a(1-a)$$
så är $A$ inverterbar så snart $a \neq 0$ **och** $a \neq 1$.

3. a)Vektorerna
$$\overrightarrow{f}_1 = \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3, \quad \overrightarrow{f}_2 = \overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_3, \quad \overrightarrow{f}_3 = \overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2.$$
utgör en ny bas i rummet om och endast om de är linjärt oberoende. Vi kollar detta genom ett välkänt determinantkriterium (Sats 5.10 sid. 143):
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$
så att $\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \overrightarrow{f}_3$ är linjärt oberoende och således en bas i rummet.
b) Koordinater av $\overrightarrow{u}$ i basen $\mathbf{f}$ ges av $Y = T^{-1}X$ där $T$ är basbytematrisen från $\mathbf{e}$ till $\mathbf{f}$. I vårt fall
$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

medan

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

så att

$$Y = T^{-1}X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

så att $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{f}_1 + 2\overrightarrow{f}_2 - \overrightarrow{f}_3$. Detta kontrollerar vi genom att "räkna tillbaka":

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{f}_1 + 2\overrightarrow{f}_2 - \overrightarrow{f}_3 &= 3(\overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3) + 2(\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_3) - (\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2) = \\ &= \overrightarrow{e}_1 + 4\overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3 = \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

4. a) Se boken - Def. 4.1 sid. 111.

   b) Vinkeln mellan två plan är detsamma som vinkel mellan deras två normalvektorer. En vektor normal till $\Pi_1$ är $\overrightarrow{n}_1 = (1, 2, 1)$ medan en vektor normal till $\Pi_2$ är $\overrightarrow{n}_2 = (1, -2, 2)$. Vinkeln $\alpha$ mellan $\overrightarrow{n}_1$ och $\overrightarrow{n}_2$ ges av

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n}_1 \cdot \overrightarrow{n}_2}{|\overrightarrow{n}_1|\,|\overrightarrow{n}_2|} = \frac{-1}{\sqrt{6}\sqrt{9}} = -\frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

   eftersom $\cos\alpha < 0$ ser vi att den beräknade vinkeln $\alpha$ är trubbig. Den spetsiga vinkeln $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ mellan $\overrightarrow{n}_1$ och $\overrightarrow{n}_2$ ges därför av

$$\cos\beta = \frac{1}{3\sqrt{6}}$$

   så att vinkeln mellan båda plan blir

$$\beta = \arccos\left(\frac{1}{3\sqrt{6}}\right).$$

   Naturligtvis, på tentamen behöver man inte veta det numeriska värdet av $\arccos\left(\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)$ så att formeln ovan representerar det slutliga svaret. För de nyfikna:

$$\arccos\left(\frac{1}{3\sqrt{6}}\right) \approx 82,2^\circ.$$

5. För att uppgiften skulle ha någon mening så måste $\Pi$ och $l$ vara parallella (varje linje som inte är parallell med något plan skär detta plan i exakt en punkt, åtminstone i euklidisk geometri). Så är det förstås fallet, ty en normal $\overrightarrow{n} = (0, -2, 1)$ till planet är ortogonal mot linjens riktningsvektor $\overrightarrow{v} = (1, 1, 2)$. Det räcker alltså att beräkna det ortogonala avståndet mellan en punkt på linjen, säg $P = (1, 1, -1) \in l$, och planet $\Pi$. Vi betraktar alltså linjen $l_1$ som går genom $P$ och som är ortogonal mot planet $\Pi$ och således parallell med normalvektorn $\overrightarrow{n}$:

$$l_1 : (x, y, z) = P + s\overrightarrow{n} = (1, 1, -1) + s(0, -2, 1).$$

   Det är lätt att kolla att $l_1$ skär $\Pi$ då $s = s_0 = 1$. Det sökta avståndet $d$ blir då

$$d = |s_0|\,|\overrightarrow{n}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

6. Varje vektor $\overrightarrow{n}$ normal till planet är speglingens egenvektor med egenvärde $\lambda = -1$ därför att $S(\overrightarrow{n}) = -\overrightarrow{n}$ (linjen $t\overrightarrow{n}$ genom origo är således tillhörande egenrum). Vidare, varje vektor $\overrightarrow{v}$ i planet $\Pi$ är avbildningens egenvektor med egenvärde $\lambda = 1$ ty $S(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$ (planet $\Pi$ är ett egenrum tillhörande egenvärde $\lambda = 1$). Den sökta basen $\overrightarrow{f}_1, \overrightarrow{f}_2, \overrightarrow{f}_3$ får vi då genom att välja $\overrightarrow{f}_1$ som normerad $\overrightarrow{n}$ och $\overrightarrow{f}_2, \overrightarrow{f}_3$ som två ortonormala vektorer liggande i $\Pi$. Således,

$$\overrightarrow{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} (2, -3, 1) = \frac{1}{\sqrt{14}} (2, -3, 1) .$$

Vidare, som en vektor liggande i planet kan vi välja

$$\overrightarrow{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, -2).$$

Denna vektor ligger i planet ty dess komponenter uppfyller planets ekvation. Till sist, $\overrightarrow{f}_3$ kan enklast hittas genom att vektormultiplicera $\overrightarrow{f}_1$ och $\overrightarrow{f}_2$:

$$\overrightarrow{f}_3 = \overrightarrow{f}_1 \times \overrightarrow{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{70}}(6, 5, 3).$$

(där $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$ är den ursprungliga ON-basen). Observera att $\overrightarrow{f}_3 \in \Pi$ som det borde vara. Observera också att svaret ovan är långt ifrån entydigt!

7. Vi diagonaliserar först $A$ dvs vi byter bas till en bas bestående av egenvektorer till $A$. Den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

har två reella enkla rötter $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ (vilket visar att matrisen är diagonaliserbar). Motsvarade egenvektorer är t.ex. $\overrightarrow{v}_1 = (2, 1)$ och $\overrightarrow{v}_2 = (1, -1)$. I den nya basen $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ har matrisen formen $A' = T^{-1}AT$ där $T$ är basbytematrisen till den nya basen, dvs

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

med inversen

$$T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Detta ger förstås att

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

som det alltså borde vara ($A'$ måste ju vara diagonal med egenvärden på diagonalen). Eftersom $A = TA'T^{-1}$ får vi

$$\begin{aligned} A^{30} &= \underbrace{(TA'T^{-1})\,(TA'T^{-1}) \cdots (TA'T^{-1})}_{30 \text{ gånger}} = T\,(A')^{30}\,T^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + 2^{30} & 2 - 2^{31} \\ 1 - 2^{30} & 1 + 2^{31} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$