Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen i linjär algebra TNIU 75
för BI, OI, SL
2008-08-15 kl. 8.00—13.00

1. Ekvationssystemet
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 17 \\ 3x_1 + x_2 - 2ax_3 = 33 \\ ax_1 + ax_2 - 3x_3 = -88 \end{cases}$$
är entydigt lösbart då och endast då systemets matris (matris bestående av koefficienter på VL) har nollskild determinant (högerledet spelar alltså ingen roll för entydighet av lösningen). Uträkningen ger:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2a \\ a & a & -3 \end{vmatrix} = 6 + 4a$$
så att systemet är entydigt lösbart för alla $a \neq -3/2$.

2. Eftersom $P(\overrightarrow{e}_1) = \overrightarrow{e}_1$ och $P(\overrightarrow{e}_2) = \overrightarrow{0}$ så ges P:s matris i basen $\mathbf{e}$ av
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Vidare, eftersom $R(\overrightarrow{e}_1) = -\overrightarrow{e}_2$ och $R(\overrightarrow{e}_2) = \overrightarrow{e}_1$ ges R:s matris i basen $\mathbf{e}$ av
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Matrisen för $P \circ R$ blir därför (se Sats 7.4 sid. 207) lika med
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
medan matrisen för $R \circ P$ blir
$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dessa matriser kan förstås även fås direkt genom att kolla vad händer med $\overrightarrow{e}_1$ om vi först projicerar och sen roterar den etc.

3. Observera först att planen Π_1 och Π_2 är parallella så att linjerna l_1 och l_2 måste bli parallella också. Vidare, linjen l_1 ligger både i Π och i Π_1 så den ges av ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 3z = 3 \end{cases}$$
som har lösningen $l_1 : (x, y, z) = (-2t + 2, -1 + t, t) = (2, -1, 0) + t(-2, 1, 1)$. På samma sätt ges linjen l_2 av
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = 3 \end{cases}$$

vilket ger $l_2 : (x, y, z) = (3-2t, t, t) = (3, 0, 0) + t(-2, 1, 1)$. Vi ser därför att linjerna l_1 och l_2 verkligen är parallella. För att hitta avståndet mellan l_1 och l_2 väljer vi först en punkt på l_1, t.ex. $P = (2, -1, 0)$. Det sökta avståndet blir då förstås lika med avståndet mellan punkten P och linjen l_2 (vilket är en standard uppgift, se t.ex. Exempel 10 sid. 170 i boken). Vi letar efter en punkt $Q = (3-2t_0, t_0, t_0)$ på l_2 så att vektorn $\overrightarrow{PQ} = (1-2t_0, 1+t_0, t_0)$ är ortogonal mot l_2:s riktningsvektorn $\overrightarrow{v}_2 = (-2, 1, 1)$. Detta ger

$$\overrightarrow{PQ} \cdot v_2 = 0 \Leftrightarrow (1-2t_0, 1+t_0, t_0) \cdot (-2, 1, 1) = 0 \Leftrightarrow -2 + 4t_0 + 1 + t_0 + t_0 = 0 \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{6}$$

så att det sökta avståndet blir

$$d = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\left(1 - 2\frac{1}{6}, 1 + \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)\right| = \left|\left(\frac{4}{6}, \frac{7}{6}, \frac{1}{6}\right)\right| = \frac{1}{6}\sqrt{4^2 + 7^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{66}}{6} = \sqrt{\frac{11}{6}}.$$

4. a) En normal till planet Π är $\overrightarrow{n} = (3, -4, 1)$. Låt oss beteckna den underliggande basen med $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$ så att $\overrightarrow{e}_1 = (1, 0, 0)$ osv. Vi uträknar nu bilder $P(\overrightarrow{e}_i)$ av basvektorer via en välkänd formeln:

$$\begin{aligned}
P(\overrightarrow{e}_1) &= \overrightarrow{e}_1 - \frac{\overrightarrow{e}_1 \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}}\overrightarrow{n} = (1, 0, 0) - \frac{3}{26}(3, -4, 1) = \frac{1}{26}(17, 12, -3), \\
P(\overrightarrow{e}_2) &= \overrightarrow{e}_2 - \frac{\overrightarrow{e}_2 \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}}\overrightarrow{n} = (0, 1, 0) + \frac{4}{26}(3, -4, 1) = \frac{1}{26}(12, 10, 4), \\
P(\overrightarrow{e}_3) &= \overrightarrow{e}_3 - \frac{\overrightarrow{e}_3 \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}}\overrightarrow{n} = (0, 0, 1) - \frac{1}{26}(3, -4, 1) = \frac{1}{26}(-3, 4, 25).
\end{aligned}$$

Således, den sökta matrisen blir

$$A = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 17 & 12 & -3 \\ 12 & 10 & 4 \\ -3 & 4 & 25 \end{pmatrix}.$$

b) Vektorn $\overrightarrow{u}$ ligger i planet Π så att $P(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} = (4, 3, 0)$. Detta kan även beräknas med hjälp av resultat i a):

$$P(\overrightarrow{u}) \sim AX = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 17 & 12 & -3 \\ 12 & 10 & 4 \\ -3 & 4 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 104 \\ 78 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \overrightarrow{u}.$$

5. a) Se boken, Sats 7.7 sid. 218.

b)Nollrummet $N(F)$ hittar vi genom att lösa vektorekvationen $F(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ eller, i basen, matrisekvationen

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 2 & -6 & -3 \\ -3 & 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som har 1-parameterslösning $(x_1, x_2, x_3) = t(-12, -5, 2)$. Vektorn $(-12, -5, 2)$ spänner alltså upp (är en bas för) nollrummet $N(F)$. Dimensionssatsen ger då att $\dim V(F) = 2$ så att värderummet $V(F)$ är ett plan genom origo. Eftersom $V(F)$ spänns upp av kolonnvektorerna i A och pga att t.ex. de två första kolonnerna i A är linjärt oberoende kan vi ta dessa som två basvektorer i $V(F)$, så att en (bland oändligt många!) bas av $V(F)$ är $(-2, 2, -3), (4, -6, 8)$.

6. Vi kollar snabbt att $AA^t = E$ (vilket visar att F är en isometri) samt att $\det A = -1$ vilket visar (Eulers sats - Sats 7.10 sid. 225) att F är en spegling i ett plan eventuellt följd av en rotation. En normal $\overrightarrow{n}$ till spegelplanet måste uppfylla ekvationen $F(\overrightarrow{n}) = -\overrightarrow{n}$ som vi löser i den givna basen:

$$AX = -X \Leftrightarrow (A+E)\,X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ -8 & 10 & 4 \\ 4 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösningen är $(x_1, x_2, x_3) = t(-2, -2, 1)$ så att spegelplanet Π ges av ekvationen $-2x - 2y + z = 0$ eller $2x + 2y - z = 0$. Vi väljer nu en vektor som ligger i spegelplanet Π, t.ex. $\overrightarrow{u} = (1, 0, 2)$ och beräknar $F(\overrightarrow{u})$:

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Detta visar att $F(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ och således ingen rotation förekommer.

7. Vi börjar med den karakteristiska ekvationen:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 3 \\ -4 & -6-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-1)(\lambda+1)^2 = 0$$

så att matrisen har två egenvärden:$\lambda_1 = 1$ samt $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ (dubbelrot). Egenrummet tillhörande λ_1 är endimensionell och spänns upp t.ex. av egenvektorn $(1, -1, 1)$ (kontrollera detta!). Låt oss nu beräkna egenrummet tillhörande $\lambda_2 = \lambda_3$. Vi löser alltså matrisekvationen $(A - \lambda_2 E)X$ eller

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som har bara 1-parameterslösning $(x_1, x_2, x_3) = t(-1, 1, 0)$. Således, det finns ingen bas bestående av egenvektorer till A vilket betyder att matrisen A kan ej diagonaliseras.