Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningar för tentamen i linjär algebra TNIU 75

för BI, OI, SL

2009-08-17 kl. 8.00—13.00

1. Sätter vi in alla dessa tre punkter i polynomet får vi tre ekvationer för polynomets tre obekanta koefficienter a, b, c:
$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 3 \\ c = -11 \\ 25a + 5b + c = 24 \end{cases}$$
som har en entydig lösning: $a = 2$, $b = -3$, $c = -11$. Således, det finns exakt ett polynom som uppfyller vårt krav:
$$p(x) = 2x^2 - 3x - 11.$$

2. En matris
$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$
kommuterar med matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
om och endast om $AB = BA$ eller
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Utför vi multiplikationen får vi
$$\begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_4 \\ 2x_1 + 3x_3 & 2x_2 + 3x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 & -x_1 + 3x_2 \\ x_3 + 2x_4 & -x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}.$$
Jämför vi dessa matriser får vi ett system av 4 linjära ekvationer vars lösning (fås t.ex. via Gausselimination) är 2-parametrisk:
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-t + s, -\frac{1}{2}t, t, s\right)$$
Det betyder att mängden av matriser som kommuterar med A är också 2-parametrisk och ges (t.ex.) av
$$B = t \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Observera att denna mängd innehåller även enhetsmatrisen E, vilket är självklart ty E kommuterar med alla matriser, inte enbart med A.

3. Beteckna linjernas riktningsvektorer med $\overrightarrow{v}_1 = (2, 3, 0)$ respektive $\overrightarrow{v}_2 = (1, 0, 0)$ och linjernas skärningspunkter med planet Π med P_1 respektive P_2. En normalvektor till planet är $\overrightarrow{n} = (1, 1, -1)$. Vi börjar med att bestämma linjen $l_{1,p}$ dvs projektionen av l_1 på Π. Genom att stoppa l_1:s ekvation i planets ekvation får vi $(1 + 2t) + (-1 + 3t) - 0 = 5$ vilket ger $t = 1$ så

att $P_1 = (3,2,0)$. Vidare, $\overrightarrow{v}_1$:s ortogonala projektionen på Π (vi betecknar den med $\overrightarrow{v}_{1,p}$) ges av projektionsformeln:

$$\overrightarrow{v}_{1,p} = \overrightarrow{v}_1 - \frac{\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}}\overrightarrow{n} = (2,3,0) - \frac{5}{3}(1,1,-1) = \frac{1}{3}(1,4,5).$$

Således, $l_{p,1}$ har ekvationen:

$$(x,y,z) = P_1 + 3t\overrightarrow{v}_{1,p} = (3,2,0) + t(1,4,5)$$

där vi alltså skalade bort den onödiga faktorn $1/3$. Exakt samma metod används för att bestämma l_2:s projektion på Π. Vi får $P_2 = (1,1,-3)$, $\overrightarrow{v}_{2,p} = \frac{1}{3}(2,-1,1)$ och således (efter omskalning av parametern) $l_{2,p}$:s ekvation blir

$$(x,y,x) = (1,1,-3) + s(2,-1,1).$$

Vi fick alltså två linjer som bägge ligger i Π (lätt att kolla!). Deras skärningspunkt hittar vi genom att jämföra deras ekvationer:

$$(3,2,0) + t(1,4,5) = (1,1,-3) + s(2,-1,1)$$

som leder till ett överdeterminerat ekvationssystem:

$$\begin{cases} 3 + t = 1 + 2s \\ 2 + 4t = 1 - s \\ 5t = -3 + s \end{cases}$$

som har entydig lösning $t = -4/9, s = 7/9$. Genom att stoppa $t = -4/9$ i $l_{p,1}$:s ekvation får vi till sist den sökta skärningspunkten

$$S = (3,2,0) - \frac{4}{9}(1,4,5) = \left(\frac{23}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{20}{9}\right).$$

Naturligtvis, vi kan lika gärna sätta $s = 7/9$ i $l_{p,2}$:s ekvation för att få S:

$$S := (1,1,-3) + \frac{7}{9}(2,-1,1) = \left(\frac{23}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{20}{9}\right).$$

Det är även lätt att kontrollera att $S \in \Pi$.

4. a) Notera först att $\overrightarrow{u}$ och $\overrightarrow{v}$ är ortogonala. Enklaste sättet at komplettera dem till en höger ortogonal bas är då att ta som den tredje basvektorn deras kryssprodukt. Vi tar alltså:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,2,1)\,.$$

b) Basbytematrisen från $\mathbf{e}$ till basen $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ får vi om vi skriver de nya basvektorernas koordinater i den gamla basen som kolonner:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Naturligtvis,

$$\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{e}_1 + 3\overrightarrow{e}_2 - \overrightarrow{e}_3$$

så att $\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{e}_2 = (1, 3, -1)$ i basen $\mathbf{e}$. För att skriva $\overrightarrow{e}_2$ i den nya basen $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ kan vi använda formeln (se Sats 3.5 sid. 104 om basbyte) $X_e = TX_f$ där

$$X_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

är $\overrightarrow{e}_2$:s koordinater i basen $\mathbf{e}$ medan X_f är en kolonnvektor innehållande sökta koordinater av $\overrightarrow{e}_2$ i den nya basen. Vi får alltså

$$X_f = T^{-1}X_e = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Således

$$\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}.$$

Således, i den nya basen vektorn $\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{e}_2$ kan skrivas som $\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{e}_2 = (1, 1, 1)$.

5. a) Se Sats 7.7 sid. 218.

b) Nollrummet $N(F)$ till F hittar vi genom att lösa ekvationen $F(\overrightarrow{v}) = 0$ som i den givna basen antar formen $AX = 0$ eller

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

vilket har 1-parameterslösning $(x_1, x_2, x_3) = t(1, 4, -3)$. Således, nollrummet är 1-dimensionell och spänns upp av vektorn $(1, 4, -3)$ som alltså utgör nollrummets bas. Dimensionssatsen (se uppg. a)) säger då att värderummet $V(F)$ är tvådimensionell och eftersom det spänns av A:s samtliga kolonner kan vi som bas i $V(F)$ ta t.ex. de två första kolonnvektorerna i A då de är linjärt oberoende.

6. a) Enkel uträkning visar att $AA^t = E$ så att F är isometri. Vidare, $\det A = +1$ vilket visar (se beviset av Eulers sats 7.10, sid. 225) att F är en rotation.

b) Rotationsaxeln hittar vi genom att lösa ekvationen $F(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$. I basen $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ antar denna ekvation formen $AX = X$ eller

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Lösningen av detta system (t.ex. via Gauss) är

$$(x_1, x_2, x_3) = t(1, 0, 0)$$

som är alltså rotationsaxeln. Rotationsplanet (det plan som är ortogonal mot rotationsaxeln och innehåller origo) ges därför av ekvationen $x_1 = 0$. Rotationsvinkeln får vi nu genom att välja en vektor i rotationsplanet, säg $\overrightarrow{f} = (0, 1, 0)$, och rotera den med avbildningen F. Koordinaterna för $F(f)$ är

$$Y = AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och rotationsvinkeln α är lika med vinkeln mellan $\overrightarrow{f}$ och $F(\overrightarrow{f})$ som beräknas på ett standard sätt:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{f} \cdot F(\overrightarrow{f})}{\left|\overrightarrow{f}\right| \left|F(\overrightarrow{f})\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Detta ger $\alpha = \pi/4$.

7. a) Det karakteristiska polynomet kan uträknas i en bas bestående av egenvektorer där F:s matris är diagonal med egenvärden på diagonalen. Detta ger

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda + 10.$$

b) Egenvektorer tillhörande olika egenvärden är för symmetriska avbildningar ortogonala (Sats 8.1 sid. 237) (notera att $\overrightarrow{v}_1$ och $\overrightarrow{v}_2$ är ortogonala). Således, en egenvektor som tillhör λ_3 måste vara ortogonal mot både $\overrightarrow{v}_1$ och $\overrightarrow{v}_2$ d.v.s. parallell med kryssprodukten $\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2$. Detta ger att $\overrightarrow{v}_3$ kan väljas t.ex. som

$$\overrightarrow{v}_1 = \frac{1}{4}\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 = (1, -1, 1).$$