Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-36 33 20
e-mail: krzma@itn.liu.se

Tentamen i linjär algebra TNIU 75
för BI, OI, SL
2008-03-08 kl. 8.00—13.00

Jour: Zhuangwei Liu, tel. 011-36 33 21. **Inga hjälpmedel är tillåtna.** Varje uppgift bedöms med 0-3p. För betyget n ($n = 3, 4, 5$) krävs $3n - 1$ p. För att få full poäng måste du kommentera / förklara dina beräkningar. I parentes anges hur många poäng varje deluppgift är värd. Skriv på omslaget (i fältet Poäng/Credits) hur många bonuspoäng du har. *Kontrollera dina svar där det är möjligt!*

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}.$$

2. Låt $\mathbf{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ vara en bas i rummet. Låt även

$$\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

a) Visa att vektorerna $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ utgör en ny bas i rummet. (1p)

b) Ange basbytematrisen från basen $\mathbf{e}$ till $\mathbf{f}$. (1p)

c) En vektor $\vec{u}$ har koordinater $(1, 0, 1)$ i basen $\mathbf{f}$. Ange dess koordinater i basen $\mathbf{e}$. (1p)

3. Planet Π innehåller punkterna $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 2, -1)$ samt $C = (2, 2, 3)$. Bestäm avståndet mellan Π och punkten $P = (1, 1, 1)$.

4. Beräkna volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $\vec{u} = (1, 2, -7)$, $\vec{v} = (-3, 2, 4)$ samt $\vec{w} = (3, 1, -5)$ (givna här i en höger ON-bas).

5. a) Visa att en linjär avbildning F som i en ON-bas $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

är en rotation. (1p)

b) Ange rotationsaxeln och rotationsvinkeln. (1+1p)

6. Ange en ON-bas av egenvektorer för en linjär avbildning F som i en ON bas $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. a) Formulera dimensionssatsen. (1p)

b) Ange nollrummet $N(P)$ och värderummet $V(P)$ till den ortogonala projektionen P av rummet på ett plan som i en ON-bas ges av $13x_1 - 11x_2 + 83x_3 = 0$. (1+1p)