

Tentamen i linjär algebra TNIU 75

för BI, OI, SL

2009-08-17 kl. 8.00—13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift bedöms med 0-3p. För betyget n ($n = 3, 4, 5$) krävs $3n - 1$ p. För att få full poäng måste du kommentera / förklara dina beräkningar. I parentes anges hur många poäng varje deluppgift är värd. *Kontrollera dina svar där det är möjligt!*

1. Ange de andragradspolynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ som passerar genom alla tre punkter $(-2, 3)$, $(0, -11)$ och $(5, 24)$.
2. Ange samtliga matriser som kommuterar med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Två linjer: $l_1 : (x, y, z) = (1, -1, 0) + t(2, 3, 0)$ och $l_2 : (x, y, z) = (1, 1, -3) + s(1, 0, 0)$ (givna här i någon ON-bas) projiceras ortogonalt på planet $\Pi : x + y - z = 5$. Bestäm dessa projektioners skärningspunkt.
4. Låt $\vec{u} = (1, 0, -1)$ och $\vec{v} = (-1, 1, -1)$ i någon höger ON-bas $\mathbf{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
 - a) Ange en vektor \vec{w} så att $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ utgör en *högerorienterad* ortogonal bas.. (1p)
 - b) Skriv basbytematrisen från basen \mathbf{e} till den nya basen. (1p)
 - c) Skriv vektorn $\vec{u} + 3\vec{e}_2$ i de båda baserna. (1p)
5. a) Formulera dimensionssatsen. (1p)
b) Ange en bas för nollrummet $N(F)$ och en bas för värderummet $V(F)$ för en linjär avbildning F som i en viss bas ges av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2p)

6. a) Visa att en linjär avbildning F som i en ON-bas $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

är en rotation. (1p)

b) Ange rotationsaxeln och rotationsvinkeln. (2p)

7. a) En linjär avbildning F i rummet har egenvärden $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 5$. Ange avbildningens karakteristiska polynom. (1p)
b) Antag nu att F är symmetrisk och att $\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$ och $\vec{v}_2 = (-2, 0, 2)$ (skrivna här i en ON-bas) är två egenvektorer tillhörande λ_1 respektive λ_2 . Ange en egenvektor tillhörande λ_3 . (2p)